Современная математика. Фундаментальные направления. Том 22 (2007). С. 5–37

УДК 514.11

# АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ МНОГОГРАННИКАМИ

© 2007 г. **Е. М. БРОНШТЕЙН**

Аннотация. В обзоре приводятся результаты, затрагивающие разные аспекты многогранной аппроксимации выпуклых тел и некоторые смежные вопросы.

*Посвящаю светлой памяти Леонида Дмитриевича Иванова*

## СОДЕРЖАНИЕ



## 1. Введение

В обзоре приводятся результаты, затрагивающие разные аспекты многогранной аппроксимации выпуклых тел и некоторые смежные вопросы. Известные обзоры П. Грубера [142, 145] были написаны более десяти лет назад. Разумеется, автор широко использовал эти статьи. За последнее время многие сюжеты приобрели весьма совершенную форму (например, асимптотические оценки степени приближения в разных метриках в гладком случае), возникли новые направления (например, замечательные результаты А. М. Вершика и И. Бараньи об аттрактивных множествах). Об интенсивности развития тематики может свидетельствовать тот факт, что около половины работ, на которые приводятся ссылки в обзоре, появились за последнее десятилетие.

Автор заранее благодарен за замечания (лакуны при подготовке подобных материалов неизбежны).

## 2. Обозначения

$E^d$ $d$-мерное евклидово пространство ($d \geq 2$);
$B^d$ шар единичного радиуса в $E^d$;
$S^d$ сфера единичного радиуса (граница $B^d$);
$\Im^d$ множество выпуклых тел (т.е. компактных выпуклых подмножеств с непустой внутренностью) в $E^d$;
$\Re^d \subset \Im^d$ множество многогранников;
$\Re^d_n \subset \Im^d$, $n \geq d+1$, множество многогранников не более чем с $n$ вершинами;
$\Re^d_{(n)} \subset \Im^d$, $n \geq d+1$, множество многогранников не более чем с $n$ гранями (размерности $d-1$, далее оговорку о размерности опускаем);
$\Re^d_i(U) \subset \Re^d$ множество многогранников, содержащихся в теле $U \in \Im^d$;
$\Re^d_o(U) \subset \Re^d$ множество многогранников, содержащих тело $U \in \Im^d$;
Vol объем;

conv выпуклая оболочка;
$\partial U$ граница множества;
$\sigma(\partial U)$ мера границы;
$\mathbf{E}$ математическое ожидание;
Var дисперсия;
card мощность;
$k_U(x)$ гауссова кривизна поверхности (кривизна кривой);
$\rho_H$ расстояние Хаусдорфа (см. (1));
$\rho_p$ расстояние, порожденное метрикой $L_p$ (см. (2));
$\rho_N$ расстояние Никодима (см. (3));
$\rho_{BM}$ расстояние Банаха—Мазура (см. (4));
$\rho_{BM1}$ объемное расстояние (см. (5));
$U+V$ сумма Минковского выпуклых тел $U$, $V$.

Смысл символов $\Re^d_{n,i}(U)$, $\Re^d_{n,o}(U)$, $\Re^d_{(n),i}(U)$, $\Re^d_{(n),o}(U)$ очевиден.

## 3. Метрики

Наиболее распространенной метрикой на пространстве $\Im^d$ и различных его подпространствах является метрика Хаусдорфа (см., например, [3]):

$$\rho_H(U,V) = \min\left\{\lambda : U \subset V + \lambda B^d,\ V \subset U + \lambda B^d\right\}. \tag{1}$$

Близкой к метрике Хаусдорфа является метрика Эглстона:

$$\rho_E(U,V) = \min\left\{\lambda : U \subset V + \lambda B^d\right\} + \min\left\{\lambda V \subset U + \lambda B^d\right\}.$$

Очевидно, что

$$\rho_H(U,V) \leqslant \rho_E(U,V) \leqslant 2\rho_H(U,V).$$

Множество $\Im^d$, наделенное метрикой Хаусдорфа, является локально компактным (теорема выбора Бляшке [3]).

Метрику Хаусдорфа (1) можно задать через опорные функции $h_U(x) = \max\limits_{y\in U}(y,x)$ тел, определенные на $S^d$:

$$\rho_H(U,V) = \left\| h_U - h_V \right\|_C .$$

Последнее выражение позволяет определить широкий класс метрик вида

$$\rho_p(U,V) = \left\| h_U - h_V \right\|_{L^p} . \tag{2}$$

Интегрирование производится по мере поверхности. В этих обозначениях $\rho_H = \rho_\infty$. Метрики вида (2) введены в [189].

Метрика Никодима определяется как объем симметрической разности:

$$\rho_N(U,V) = \mathrm{Vol}(U\Delta V) = \mathrm{Vol}(U\cup V) - \mathrm{Vol}(U\cap V). \tag{3}$$

Разумеется, метрики (1), (3) имеют смысл для более широких классов множеств. В пространстве $\Im^d$ эти метрики топологически равносильны. Далее все топологические понятия (всюду плотность, сходимость и т. д.) предполагают именно эту топологию.

На множестве классов аффинно эквивалентных выпуклых тел определяется так называемая метрика Банаха—Мазура. Приведем ее определение в форме [44] (сходные конструкции использовались многими авторами; из недавних работ см., например, [151]):

$$\rho_{BM}(U,V) = \inf\left\{\lambda \geq 1 : \exists A \in \mathrm{Af}(E^d),\ t \in E^d,\ U \subset A(V) \subset \lambda U + t\right\}. \tag{4}$$

Здесь Af — группа аффинных преобразований. Эта величина (несмотря на название) не является метрикой, но метрикой является ее логарифм. Множество классов аффинно эквивалентных выпуклых тел при наделении такой метрикой является метрическим компактом [44].

В качестве меры уклонения, инвариантной относительно аффинных преобразований пространства, используется также величина

$$\inf_{A\in \mathrm{Af}(E^n)} \left\{ \frac{\mathrm{Vol}(A(V))}{\mathrm{Vol}(U)} : A(V) \supset U \right\}$$

(см. [14]). Далее эта мера используется в неявной форме. Будет также использоваться величина

$$\rho_{BM1}(U,V) = \ln \inf_{A\in \mathrm{Af}} \left\{ \frac{\mathrm{Vol}(A(V))}{\mathrm{Vol}(U)} : A(V) \supset U \right\} + \ln \inf_{A\in \mathrm{Af}} \left\{ \frac{\mathrm{Vol}(A(U))}{\mathrm{Vol}(V)} : A(U) \supset V \right\}. \qquad (5)$$

Эта величина является метрикой. Очевидно, что при $U, V \in \Im^d$ справедливо неравенство

$$\rho_{BM1}(U,V) \leqslant d \ln \rho_{BM}(U,V).$$

Разумеется, вместо группы аффинных преобразований может использоваться любая группа преобразований пространства $E^d$.

Метрика $\rho_{BM}$, определенная на множестве выпуклых тел с центром симметрии — началом координат (при $t = 0$), есть метрика на семействе $d$-мерных нормированных пространств (тела рассматриваются как единичные шары). Такое пространство называется компактом Минковского.

В некоторых случаях будут использоваться и другие меры удаленности выпуклых тел друг от друга.

Более подробные сведения о метриках на пространствах выпуклых тел см. в [14, 141]. Далее через $\delta(U,\Sigma)$ с индексом, соответствующем той или иной метрике, обозначена величина $\inf\{\rho(U,V) : V \in \Sigma\}$, где $\Sigma$ — какой-либо класс выпуклых тел. Отметим, что inf из стандартных соображений во всех рассматриваемых далее ситуациях достигается.

## 4. Общие результаты

**4.1.** Для любого $U \in \Im^d$ справедлива оценка

$$\delta_H(U, \Re^d_n) \leqslant \frac{c(U)}{n^{2/(d-1)}}. \qquad (6)$$

Этот результат получен независимо в [5, 103]. Естественно, та же оценка справедлива для классов $\Re^d_{(n)}$, $\Re^d_{n,i}(U)$, $\Re^d_{n,o}(U)$, $\Re^d_{(n),i}(U)$, $\Re^d_{(n),o}(U)$.

Очевидно, что многогранники наилучшего приближения из $\Re^d_{n,i}(U)$ вписаны в $U$, т.е. каждая вершина многогранника лежит на границе $\partial U$, а многогранники наилучшего приближения из $\Re^d_{(n),o}(U)$ описаны вокруг $U$, т.е. каждая грань многогранника имеет с $\partial U$ общие точки.

При дважды гладкой границе $\partial U$ с положительной кривизной $k_U(x)$ плотности расположения вершин вписанных и точек касания граней описанных многогранников наилучшего приближения асимптотически пропорциональны $\sqrt{k_U(x)}$ [128]. Описан асимптотический характер распределения проекций вершин многогранников наилучшего приближения из $\Re^d_n$ и $\Re^d_{(n)}$ на границу $\partial U$, если граница дважды гладкая и не имеет ограничений на кривизну [78].

В трехмерном пространстве описанные многогранники наилучшего приближения $P_n$ для тел $U$ с дважды гладкой границей и положительной кривизной асимптотически имеют весьма правильную структуру [127]. Пусть

$$\rho_H(U, P_n) = \delta_H\left(U, \Re^3_{(n),o}(U)\right).$$

Как уже отмечалось, каждая грань $P_n$ касается $U$. Если грань касается $U$ в точке $q$, то будем считать, что соответствующая опорная плоскость снабжена метрикой $\rho_{(q)}$, индуцированной римановой метрикой поверхности $\partial U$ в точке $q$. Последовательность многогранников $P_n$ имеет асимптотически правильные шестиугольные грани в следующем смысле. Существуют последовательности $\sigma_n \to 0$ и $T_n = o(n)$ такие, что грани многогранника $P_n$ за исключением $T_n$ штук являются шестиугольниками, у которых стороны и расстояния от вершин до точки $q$ касания грани с $\partial U$ равны $\sigma_n(1 + o(1))$ при $n \to \infty$ в метрике $\rho_{(q)}$. Подобные свойства имеют место и для вписанных многогранников.

В [79] получены оценки сверху мер приближений по Хаусдорфу (и в других метриках) тел с дважды гладкими границами многогранниками, число $k$-мерных граней которых ($k \leqslant (d-1)$) не превосходит $n$.

При $d = 2$ многоугольники наилучшего приближения обладают следующими свойствами [161, 162, 228]. Если $U \in \Im^2 \setminus \Re^2_n$ и

$$\rho_H(U, P) = \delta_H(U, \Re^2_n) = \varepsilon,$$

то все вершины $P$ находятся вне $U$ и удалены от $U$ на $\varepsilon$, все стороны $P$ пересекают $U$, причем на каждой стороне имеется внутренняя точка $U$, удаленная от $\partial U$ на $\varepsilon$. Следует отметить, что эти свойства необходимы, но не достаточны.

Для плоских фигур доказаны следующие верхние оценки расстояний Хаусдорфа [34]:

$$\delta_H(U, \Re_n^2) \leqslant \frac{L \sin \frac{\pi}{n}}{2n(1+\cos\frac{\pi}{n})},$$
$$\delta_H(U, \Re_{n,i}^2(U)) \leqslant \frac{L}{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$
$$\delta_H(U, \Re_{n,o}^2(U)) \leqslant \frac{L}{2n} \sin \frac{\pi}{n},$$

где $L$ — длина границы $\partial U$. Если при этом $U$ — правильный $(n+1)$-угольник, то (см. [12])

$$\delta_H(U), \Re_n^2) = \frac{L}{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Для выпуклого тела $U$ с дважды гладкой границей

$$\delta_H(U, \Re_{n,i}^d(U)) \sim \delta_H(U, \Re_{(n),o}^d(U)) \sim \frac{1}{2} \left( \frac{\vartheta_{d-1}}{n \operatorname{Vol}(B^{d-1})} \int\limits_{\partial U} \sqrt{k_U(x)} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)} \tag{7}$$

при $n \to \infty$. Здесь $\vartheta_d$ — минимальная плотность покрытия пространства $E^d$ шарами равного радиуса, $\sigma(x)$ — поверхностная мера границы тела. Этот результат был получен в [117, 189] при $n = 2$, в [213, 215] для тел с трижды гладкой границей, в [143] для тел с дважды гладкой границей и положительной гауссовой кривизной $k_U$. Ограничения на положительность кривизны сняты в [78].

Известны значения $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 2\pi/\sqrt{27}$. Условия гладкости, наложенные на границу $U$, возможно, могут быть ослаблены, но не отброшены, как показывает пример многогранника. Более того, результат такого типа неверен для тел с гладкой, но не дважды гладкой границей [146].

Из асимптотических соотношений

$$\delta_H(U, \Re_{n,i}^d(U)) \sim \delta_H(U, \Re_{n,o}^d(U)) \sim 2\delta_H(U, \Re_n^d),$$
$$\delta_H(U, \Re_{(n),i}^d(U)) \sim \delta_H(U, \Re_{(n),o}^d(U)) \sim 2\delta_H(U, \Re_{(n)}^d)$$

при $n \to \infty$, справедливых для тел с гладкой границей, и (7) вытекают и другие асимптотические формулы.

Применяя формулу Коши—Буняковского к интегралу в правой части (7) и используя тот факт, что единственной выпуклой поверхностью с постоянной гауссовой кривизной является сфера, получаем, что в асимптотическом смысле в метрике Хаусдорфа хуже всего аппроксимируются многогранниками шары.

При $d = 2$ в формулах типа (7) известен второй член асимптотики [182, 183]. Для того, чтобы сформулировать результаты, введены некоторые обозначения.

Пусть граница $\partial U$ выпуклой фигуры $U$ является четырежды гладкой, имеет положительную кривизну и параметризована натуральным параметром $u \in [0, L]$. Введем новую параметризацию кривой $\partial U$:

$$s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{k_U(u)} d\sigma(u),$$

где $k_U(u)$ — кривизна границы в соответствующей точке. Обозначим через $L'$ величину $s(L)$. Определим на $\partial U$ функции следующего вида:

$$r(s) = k_U(s) + \frac{k_U''(s)}{k_U(s)} - \frac{5(k_U'(s))^2}{6(k_U(s))^2},$$
$$l(s) = k_U(s) + \frac{k_U''(s)}{5k_U(s)} - \frac{7(k_U'(s))^2}{30(k_U(s))^2}.$$

При $n \to \infty$ справедливы следующие формулы:

$$\delta_H(U, \Re^2_{n,i}(U)) = \frac{L'^2}{8n^2} - \frac{L'^3}{384n^4} \int\limits_0^{L'} r(s)d\sigma(s) + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \tag{8}$$

$$\delta_H(U, \Re^2_{n,o}(U)) = \frac{L'^2}{8n^2} + \frac{5L'^3}{384n^4} \int\limits_0^{L'} l(s)d\sigma(s) + o\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{9}$$

Для фигур $U \in E^2$ с дважды гладкой границей исследовался вопрос о качестве приближения многоугольниками, вершины которых выбираются на границе $\partial U$ в соответствии с функцией плотности $h$ [189]. Пусть функция $h : \partial U \to R^+$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^L h(u)d\sigma(u) = 1,$$

точки $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \partial U$ таковы, что при $i = 1, \ldots, n-1$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} h(u)d\sigma(u) = \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\rho_H(U, \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_n)) \sim \frac{1}{8} \max_{x \in \partial U} \frac{k_U(u)}{h^2(u)} \frac{1}{n^2} \tag{10}$$

при $n \to \infty$.

Отсюда видно, что подобная конструкция дает асимптотически лучший результат, когда плотность расположения точек на границе пропорциональна $\sqrt{k_U(u)}$, что соответствует отмеченному выше общему утверждению.

Очевидно, многогранники асимптотически приближаются очень хорошо, а тела, для которых доказана формула (7), наихудшим образом (6). При этом оба указанных класса плотны в $\Im^d$. Тем не менее для подмножества $\Im^d$ второй бэровской категории величины

$$n^{2/(d-1)} \cdot \delta_H(U, \Re^d_{n,i}(U)), \quad n^{2/(d-1)} \cdot \delta_H(U, \Re^d_{(n),o}(U)) \tag{11}$$

с ростом $n$ изменяются нерегулярно. Это относится и к другим метрикам. Более точные формулировки см. в п. 4.9.

Для характеризации нерегулярного характера многогранного приближения можно применять нижнее и верхнее аппроксимационные числа [23, 217]

$$\underline{a}(U) = \inf\left\{s > 0 : \varliminf_{n\to\infty} n[\delta_H(U, \Re^d_n)]^s = 0\right\},$$
$$\overline{a}(U) = \inf\left\{s > 0 : \varlimsup_{n\to\infty} n[\delta_H(U, \Re^d_n)]^s = 0\right\}.$$

У многогранников эти числа совпадают и равны нулю, у тел с дважды гладкими границами совпадают и равны $2/(d-1)$. Существуют тела, у которых

$$\underline{a}(U) = 0, \quad \overline{a}(U) > 0$$

(см. [217]). В [23] введены функциональные характеристики асимптотики, которые характеризуют динамику аппроксимации многогранниками более адекватно. В цитированных работах установлена связь поведения величин типа $\delta_H(U, \Re^d_n)$ с метрическими характеристиками (в частности, с размерностью Хаусдорфа) некоторых подмножеств экстремальной границы тел.

**4.2.** Для метрики Никодима очевидны следующие оценки:

$$\rho_N(U,V) \leqslant \rho_H(U,V)\cdot\sigma(\partial U).$$

Отсюда непосредственно вытекают оценки сверху вида (6) для $\delta_N(U,\Sigma)$, где $\Sigma$ — любой из рассматриваемых классов многогранников.

В [132] получена более точная оценка:

$$\delta_N(U,\Re^d_{n,i}(U)) \leqslant \frac{cd}{n^{2/(d-1)}}\operatorname{Vol}(U),$$

где $c$ — абсолютная константа.

Пусть $U\in\Im^d$, $B$ — шар в $E^d$, для которого $\operatorname{Vol}(U)=\operatorname{Vol}(B)$. Тогда справедлива следующая оценка сверху (см. [186]):

$$\delta_N(U,\Re^d_{n,i}(U)) \leqslant \delta_N(B,\Re^d_{n,i}(B)), \tag{12}$$

причем равенство в (12) достигается на эллипсоидах. Только ли на эллипсоидах достигается равенство, не известно.

В плоском случае справедлива следующая оценка [210] (при $n=3$ ее аналог получен в [71]):

$$\delta_N(U,\Re^2_{n,i}(U)) \leqslant \operatorname{Vol}(U)\left(1-\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Для выпуклых тел с гладкой границей получена следующая оценка снизу [218]:

$$\delta_N(U,\Re^d_{(n),o}(U)) \geq \frac{c(U)}{n^{2/(d-1)}(\ln n)^2}. \tag{13}$$

Ниже приводятся результаты, усиливающие оценки (12), (13) для тел с дважды гладкой границей.

Для строго выпуклой плоской фигуры $U$ и такого многоугольника $P_n$, что $\rho_N(U,P_n)=\delta_N(U,\Re^2_n)$, выполняется следующее свойство [112]. Пусть $u_1u_2$ — сторона $P_n$, а $v_1$, $v_2$ — точки пересечения этой стороны с границей $\partial U$ (порядок расположения точек $u_1v_1v_2u_2$). Тогда

$$\|v_1-u_1\| = \|v_2-u_2\| = \frac{1}{4}\|u_2-u_1\|.$$

Доказан следующий многомерный аналог этого утверждения [164]. Если $U\subset E^d$ — строго выпуклое тело и $P_n$ — многогранник, для которого $\rho_N(U,P_n)=\delta_N(U,\Re^d_{n,o})$, то каждая грань $P_n$ касается $\partial U$ в центре тяжести грани.

Для метрики Никодима последовательность многогранников наилучшего приближения в $E^3$ также обладает свойствами, описанными в п. 4.1 (см. [147]), при этом

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sigma(\partial U)}{3^{3/2}n}}.$$

Для выпуклого тела $U$ с дважды гладкой границей справедливы следующие асимптотические формулы (см. [144] при условии положительности кривизны и [78] в общем случае):

$$\delta_N(U,\Re^d_{(n),o}(U)) \sim a_{d-1}\left(\sigma_a(\partial U)\right)^{(d+1)/(d-1)}\cdot\frac{1}{n^{2/(d-1)}}, \tag{14}$$

$$\delta_N(U,\Re^d_{n,i}(U)) \sim b_{d-1}\left(\sigma_a(\partial U)\right)^{(d+1)/(d-1)}\cdot\frac{1}{n^{2/(d-1)}} \tag{15}$$

при $n\to\infty$, где

$$\sigma_a(\partial U) = \int\limits_{\partial U} k_U(x)^{1/(d+1)}d\sigma(x) \tag{16}$$

— аффинная площадь поверхности.

Константы $a_d$, $b_d$ в формулах (14), (15) определяются соответственно покрытием пространства типа Дирихле—Вороного и триангуляцией Делоне. Известны следующие значения этих констант:

$$a_1=\frac{1}{24},\quad a_2=\frac{5}{36\sqrt{3}},\quad b_1=\frac{1}{12},\quad b_2=\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Формулы (14), (15) при $n=2$ анонсированы в [36] и доказаны в [189], при $n=3$ анонсированы также в [36] и доказаны в [139, 140]. Аффинная площадь поверхности в формулах (14),

(15) максимальна только на эллипсоидах, т.е. в асимптотическом смысле эллипсоиды хуже всего приближаются многогранниками в метрике Никодима.

Для шара получен следующий результат конечного характера [133].

Существуют такие абсолютные константы $c_1$, $c_2$, что при любых $d$, $n \geq (c_2 d)^{(d-1)/2}$, $P \in \Re^d_{n,i}(B^d)$ выполняется неравенство

$$\rho_N(B^d, P) \geq c_1 d \operatorname{Vol}(B^d) n^{-2/(d-1)}.$$

Это усиление результатов из [131, 132].

Более слабый аналог этой оценки для $\Re^d_{(n),o}(B^d)$ получен в [131]. Результаты об аппроксимации шаров многогранниками получены также в [95].

Известна оценка порядка второго члена асимптотики величины $\delta_N(U, \Re^d_{(n),o}(U))$ [149]. Если $\Delta$ — разность между левой и правой частями в формуле (14), то

$$\Delta = O\left(\frac{1}{n^{7/3(d-1))-\varepsilon}}\right)$$

при $n \to \infty$, где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число. Более слабая оценка получена в [80]. При $d = 3$ имеем

$$\Delta = O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$$

(см. [148]). Точный порядок второго члена асимптотики для $\Delta$ не известен при $d \geq 3$.

В классе тел, для которых доказаны формулы (14), (15), доказана также справедливость по порядку оценок того же вида для семейств $\Re^d_n$, $\Re^d_{(n)}$ (см. [185]), константы известны для $d = 3$ (см. [82]): $\dfrac{5}{36\sqrt{3}} - \dfrac{1}{8\pi}$ для $\Re^d_{(n)}$ и $\dfrac{1}{12\sqrt{3}} - \dfrac{1}{16\pi}$ для $\Re^d_n$.

При $d = 2$ для фигур с трижды гладкой границей и положительной кривизной известны вторые члены асимптотики [182]. Если границу $\partial U$ параметризовать аффинной длиной дуги

$$s(t) = \int\limits_0^t \sqrt[3]{k_U(u)}\,d\sigma(u), \quad L_a = s(L) \tag{17}$$

($L$ — длина кривой $\partial U$), то

$$\delta_N(U, \Re^2_{n,o}(U)) = \frac{L_a^3}{24n^2} + \frac{L_a^4}{240n^4}\int\limits_0^{L_a} k_a(u)\,d\sigma(u) p + \sum_{i=3}^{\infty}\frac{c_i(U)}{n^{2i}},$$

$$\delta_N(U, \Re^2_{n,i}(U)) = \frac{L_a^3}{12n^2} - \frac{L_a^4}{240n^4}\int\limits_0^{L_a} k_a(u)\,d\sigma(u) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

при $n \to \infty$. Здесь $k_a(u) = \det(x'''(u), x''(u))$ — аффинная кривизна. Справедливость разложимости по четным степеням $1/n$ в первой формуле доказана в [222].

В [184] для $\delta_N(U, \Re^2_{n,i}(U))$ получен первый член асимптотики без ограничения на кривизну (для произвольных выпуклых кривых кривизна существует почти всюду и интегрируема). Следует иметь в виду, что у границы многоугольника $k(x) = 0$ почти всюду и тем самым $L_a = 0$.

**4.3.** Оценка сверху типа (6) для метрики $\rho_p$ следует из простого неравенства

$$\rho_p(U, V) \leqslant (\sigma(S^d))^{1/p} \rho_H(U, V).$$

Что касается асимптотических формул, то они известны только для плоскости [189]:

$$\delta_p(U, \Re^2_{n,i}(U)) \sim \frac{1}{8(2p+1)^{1/p} n^2} \left( \int\limits_{\partial U} k_U(x)^{(p+1)/(2p+1)} d\sigma(x) \right)^{(2p+1)/(p)},$$

$$\delta_p(U, \Re^2_{n,o}(U)) \sim \frac{1}{2n^2} \left( \int\limits_0^1 t^p (1-t)^p dt \right)^{1/p} \left( \int\limits_{\partial U} k_U(x)^{(p+1)/(2p+1)} d\sigma(x) \right)^{(2p+1)/(p)}.$$

В случае $p = 1$, $d = 2$ (в этом случае расстояние $\rho_1(U, V)$ равно разности удвоенного периметра выпуклой оболочки множества $U \cup V$ и суммы периметров $U$ и $V$) получена следующая оценка [122]:

$$\delta_1(U, \Re^2_n) \leqslant L \left( 1 - \frac{2n}{\pi} \arcsin \left( \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n} \right) \right),$$

причем равенство справедливо только для кругов. Для $\Re^2_{n,i}(U)$, $\Re^2_{n,o}(U)$ подобные результаты получены в [212].

**4.4.** Для метрики Банаха—Мазура оценки при $\Sigma = \Re^d_n$, $\Re^d_{(n)}$ (другие рассматриваемые выше классы многогранников не являются аффинно инвариантными) имеют вид

$$\delta_{BM}(U, \Sigma) - 1 \leqslant \frac{c(U)}{n^{2/(d-1)}}. \tag{18}$$

Они вытекают из того, что если $aB^d \subset U \subset V$, то

$$\rho_{BM}(U, V) \leqslant 1 + f(a) \rho_H(U, V),$$

где функция $f(a)$ не зависит от размерности $d$.

Для центрально симметричных тел $U$ с дважды гладкой границей справедливы следующие оценки (см. [143] при условии положительности кривизны и [78] в общем случае):

$$\delta_{BM}(U, \Re^d_{2n}) - 1 \sim \delta_{BM}(U, \Re^d_{(2n)}) - 1 \sim$$
$$\sim \frac{1}{2} \left( \frac{\vartheta_{d-1}}{2n \operatorname{Vol}(B^{d-1})} \int\limits_{\partial U} \left( \frac{k_U(x)}{h_U(n_U(x))^{d-1}} \right)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)}. \tag{19}$$

Здесь величина $\vartheta_{d-1}$ та же, что и в (7), $n_U(x)$ — единичная внешняя нормаль в точке $x \in \partial U$, $h$ — опорная функция.

Интеграл в правой части (19) инвариантен относительно линейных преобразований пространства. Он называется центральной аффинной площадью поверхности [73]. Выражение в правой части максимально для эллипсоидов.

**4.5.** Пусть $W_0(U)$, $W_1(U)$, $\ldots$, $W_{d-1}(U)$ — интегралы поперечных мер тела $U$ (см., например, [37]), т.е. $W_k(U)$ — это нормированная средняя мера проекции тела на $(d-k)$-мерные подпространства. В частности,

$$W_0(U) = \operatorname{Vol}(U), \quad W_1(U) = \sigma(\partial U)/d.$$

Естественным является вопрос: как сильно могут отличаться интегралы поперечных мер тела и аппроксимирующего многогранника?

Доказано [127], что

$$\inf\{(W_k(U) - W_k(P)) : P \in \Re^d_{n,i}(U)\} \leqslant \frac{c(U)}{n^{2/(d-1)}} \tag{20}$$

Та же оценка справедлива для $P \in \Re^d_{(n),o}$.

При $k = d-1$ (отметим, что $W_{d-1}$ отличается от средней ширины множителем $d \cdot \mathrm{Vol}(B^d)/2$) в [127] получено следующее уточнение формулы (20) для тел $U$ с дважды гладкой границей и положительной кривизной:

$$\inf\{(W_{d-1}(P) - W_{d-1}(U)) : P \in \Re^d_{(n),o}(U)\} \sim \frac{a_{d-1}}{d \cdot \mathrm{Vol}(B^d)} \left(\int\limits_{\partial U} k_U(x)\right)^{(d+1)/(d-1)} \cdot \frac{1}{n^{2/(d-1)}}, \tag{21}$$

$$\inf\{(W_{d-1}(U) - W_{d-1}(P)) : P \in \Re^d_{n,i}(U)\} \sim \frac{b_{d-1}}{d \cdot \mathrm{Vol}(B^d)} \left(\int\limits_{\partial U} k_U(x)\right)^{(d+1)/(d-1)} \cdot \frac{1}{n^{2/(d-1)}} \tag{22}$$

при $n \to \infty$. Здесь $a_{d-1}$, $b_{d-1}$ — величины из формул (14) и (15).

В [166] сравниваются величины $\delta_{BM}(B^d, \Re^d_{n,i}(B^d))$ и $\delta_{BM}(B^d, \Re^d_{(n),i}(B^d))$. Доказано, что при $n \to \infty$ они являются эквивалентными. В то же время $\delta_N(B^d, \Re^d_{(n),i}(B^d))$ убывает быстрее, чем $\delta_N(B^d, \Re^d_{n,i}(B^d))$.

**4.6.** Интересен следующий результат [135]. Пусть $U \subset E^d$ — выпуклое тело, ширина которого $w(U)$ равна 1. Тогда

$$\sup\{w(P) : P \in \Re^d_{n,i}(U)\} \geq 1 - \delta_H(B^d, \Re^d_{\lfloor n/2 \rfloor,i}(B^d)).$$

Используя оценку (6), получаем:

$$\sup\{w(P) : P \in \Re^d_{n,i}(U)\} \geq 1 - \frac{c(d))}{n^{2/(d-1)}}.$$

Экстремальные тела (при соответствующих ограничениях) обладают геометрическими свойствами, описанными в п. 4.1 (см. [127]). В частности, в трехмерном пространстве последовательность многогранников наилучшего приближения имеет асимптотически правильные шестиугольные грани.

**4.7.** В [214] предложен еще один подход к оценке отклонения тела $U$ от многогранника $P$, содержащегося в $U$. Плоскости, содержащие грани многогранника, отсекают от тела $U$ части, называемые шапками. За меру отклонения $\rho_{\mathrm{Sh}}(U, P)$ принимается максимальный из объемов шапок. Для тел с дважды гладкой границей доказана следующая формула:

$$\inf\{\rho_{\mathrm{Sh}}(U, P) : P \in \Re^d_{(n),i}(U)\} \sim \inf\{\rho_{\mathrm{Sh}}(U, P) : P \in \Re^d_{n,i}(U)\} \sim$$
$$\sim \frac{\big(\mathrm{Vol}(B^{d-1})\big)^{-2/d-1}}{d+1} \left(\vartheta_{d-1}\sigma_a(\partial U)\right) \frac{1}{n^{1/(d+1)(d-1)}} \tag{23}$$

при $n \to \infty$. Здесь $\sigma_a(\partial U)$ — аффинная площадь поверхности (16).

Первоначальные требования трехкратной гладкости и положительности кривизны были сняты в [78, 81].

Из смысла введенной величины ясно, что она инвариантна относительно аффинных преобразований, сохраняющих объемы. Сравнение формул (23) и (14) (правда, для метрики Никодима класс $\Re^d_{(n),i}$ не рассматривался) показывает, что по порядку оценка для $\delta_N(U, \Re^d_{(n),o}(U))$ в $n$ раз больше оценки для $\delta_{\mathrm{Sh}}(U, \Re^d_{(n),i}(U))$, что вполне естественно, поскольку разность тел $U$ и $P$ состоит из $n$ частично перекрывающихся шапок.

**4.8.** Приведем близкие результаты о полигональной аппроксимации кривых. Пусть $C$ — дважды гладкая кривая в $E^d$ с конечной длиной $L$. Если $P_n$ — ломаная, вписанная в $C$, с теми же концами и не более чем $n$ вершинами, то (см. [117])

$$\min_{P_n} \rho_H(C, P_n) \sim \frac{1}{8} \left(\int\limits_0^L \sqrt{k_C(u)} d\sigma u\right)^2 \frac{1}{n^2}, \quad n \to \infty.$$

Здесь кривая $C$ параметризована натуральным параметром $u$, $k_C(u)$ — кривизна кривой. Для этого класса кривых получена также оценка минимальной разности длин кривой и ломаной $P_n$ (см. [129]):

$$\min|L(C) - L(P_n)| \sim \frac{1}{12}\left(\int\limits_0^L (k_C(u))^{2/3}\, d\sigma u\right)^3 \frac{1}{n^2}.$$

Для выпуклых фигур на плоскости минимальная разность длин границы фигуры и вписанного $n$-угольника имеет ту же асимптотику; для описанного $n$-угольника константу в предыдущей формуле следует заменить на $1/24$ (см. [117, 189]).

**4.9.** Оценки сверху типа (6) универсальны. Возникает естественный вопрос: верно ли, что множество тел, на которых реализуется некоторая более сильная оценка, достаточно обширно? Приведем более точные формулировки результатов типа (11). Напомним, что типичным в $\Im^d$ называется множество второй бэровской категории, т.е. пересечение счетного семейства открытых всюду плотных множеств.

Справедливо следующее утверждение. Пусть функции $\varphi, \psi : N \to R$ таковы, что

$$0 < \varphi(n) < \psi(n) = o\left(\frac{1}{n^{2/(d-1)}}\right).$$

Множество центрально симметричных выпуклых тел $U$, для которых

(i) $\delta_{BM}(U, \Re^d_{2n}) \leqslant 1 + \varphi(n)$ для бесконечного множества значений $n$ и
(ii) $\delta_{BM}(U, \Re^d_{2n}) \geq 1 + \psi(n)$ для бесконечного множества значений $n$,

типично в классе центрально симметричных выпуклых тел [143].

Для метрик Хаусдорфа и Никодима это утверждение также справедливо (см. [150, 217]).

Множество выпуклых плоских фигур, для которых при любых $n > 2$ существует единственный $n$-угольник наилучшего приближения в метрике Хаусдорфа или Никодима, типично в классе выпуклых фигур (см. [150, 161, 162, 228]).

Приведем еще один результат того же типа [143].

Пусть $U \in \Im^d$ — тело с дважды гладкой границей и положительной кривизной, а функции $\varphi, \psi : N \to R^+$ таковы, что

$$\varphi(n)\ddot{n}^{2/(d-1)} \to 0, \quad \psi(n) \to 0.$$

Для типичной последовательности точек $\{x_n\} \in \partial U$ в топологии произведения $(\partial U)^\infty$ имеем

$$\delta_H(U, \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}) \leqslant \varphi(n)$$

для бесконечного множества значений $n$ и

$$\delta_H(U, \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}) \geq \psi(n)$$

для бесконечного множества значений $n$.

## 5. Специальные случаи

**5.1.** В этом пункте рассматривается аппроксимация симплексами, т.е. выпуклыми оболочками $d+1$ точек общего положения в $E^d$.

Для единичного куба $K$ существует такой объемлющий симплекс $\Delta$, что

$$\operatorname{Vol}(\Delta) \leqslant \frac{d^d}{d!},$$

для шара $B^d$ объем объемлющего симплекса минимального объема равен (см. [14])

$$\operatorname{Vol}(\Delta) = \frac{d^{d/2}(d+1)^{(d+1)/2}\Gamma(d/2+1)}{\pi^{d/2} d!}.$$

Для октаэдра $U \in E^d$, т.е. выпуклой оболочки $d$ отрезков, параллельных линейно независимым векторам с общей серединой, существует объемлющий симплекс $\Delta$, для которого (см. [14])

$$\operatorname{Vol}(\Delta) \leqslant \frac{(d-1)^d}{2^{d-1}(d-2)} \operatorname{Vol}(U).$$

В [14] указано, что при изменении размерности $d$ изменяется вид тела, которое при объемной мере уклонения хуже всего аппроксимируется описанным симплексом. В частности из приведенных оценок следует, что при $d = 2$ хуже всего треугольником аппроксимируется параллелограмм, при $d = 3$ октаэдр аппроксимируется хуже, чем шар, при достаточно больших $d$ параллелепипеды аппроксимируются хуже, чем шары, а шары хуже, чем октаэдры. Исчерпывающий ответ на этот вопрос не известен.

При $d = 2$ минимальная из площадей треугольников, содержащих фигуру $U$, не превосходит $2\operatorname{Vol}(U)$, оценка реализуется на параллелограммах [137]. Если фигура $U$ имеет центр симметрии в начале координат $O$, то существует треугольник $\Delta$ с центром тяжести $O$, для которого

$$\Delta \subset C \subset \frac{5}{2}\Delta.$$

Результат является точным, как показывает пример параллелограмма [172]. Некоторые свойства треугольника максимальной площади, вписанного в выпуклую фигуру, установлены в [209]. В трехмерном случае (см. [192])

$$\rho_{BM}(C, \Delta) \leqslant \frac{13}{3}.$$

Отношение объема тела $U \in \Im^d$ к максимальному из объемов вписанных симплексов не превосходит соответствующей величины для шара [137].

Для метрики $\rho_{BM}$ (4) справедливо равенство $\rho_{BM}(B^d, \Delta) = d$, причем для любого тела $U$, отличного от симплекса, $\rho_{BM}(B^d, U) < d$ (см. [196]). Для метрики $\rho_{BM1}$ (5) наиболее удаленным от шара также является симплекс, расстояние $\rho_{BM1}(B^d, \Delta) = d \ln d$ (см. [186]). Единственным ли экстремальным телом является симплекс для этой метрики не известно. Справедлива оценка

$$\rho_{BM1}(U, \Delta) \leqslant \ln d,$$

причем равенство реализуется на центрально симметричных телах [14].

**5.2.** В этом пункте рассматривается аппроксимация параллелепипедами.

Параллелепипед в $E^d$ есть сумма Минковского $d$ линейно независимых отрезков. Для выпуклого центрально симметричнного выпуклого тела $U$ и параллелепипеда $P(U) \supset U$ минимального объема выполняется неравенство

$$\operatorname{Vol}(P(U)) \leqslant \frac{\operatorname{Vol}(U)}{\operatorname{Vol}(B^d)} \binom{d(d+1)/2}{d}^{1/2} 2^{3d/2}(d+1)^{-d/2}$$

(см. [197]). Эта оценка является уточнением оценки из [102].

Локально минимальный объем параллелепипедов $P(U)$ (при фиксированном объеме $U$) достигается для таких центрально симметричных тел, каждая граничная точка которых принадлежит границе какого-нибудь объемлющего параллелепипеда минимального объема.

Для шара $B^d$ объем объемлющего параллелепипеда минимального объема $P(B^d)$ не больше, чем для любого тела $U$ такого, что

$$\operatorname{Vol}(U) = \operatorname{Vol}(B^d),$$

что дает соответствующую оценку объема параллелепипеда снизу. При этом для любого такого центрально симметричнного тела $U$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Vol}(P(U)) \geq \sqrt[4]{2\pi d}\exp(-n/2)\operatorname{Vol}(P(B^d))$$

(см. [102]; предварительные результаты в [2, 26]). Построены центрально симметричные выпуклые многогранники $U$, вписанные эллипсоиды максимального объема которых совпадают с шарами $B^d$, такие, что

$$\operatorname{Vol}(P(U)) \geq 2^n \exp\left(n/2 - n^{2/3}(\ln n)^{1/3}\right).$$

Инвариантное относительно сдвига отношение минимального объема прямоугольных параллелепипедов, содержащих тело $U$, к $\operatorname{Vol}(U)$ не превосходит $n!$ (см. [152, 167]).

В $E^3$ для центрально симметричных тел получена более точная оценка, нежели в общем случае:

$$\operatorname{Vol}(P(U)) \leqslant \frac{3}{2}\operatorname{Vol}(U)$$

(см. [197]).

На плоскости точная оценка $\mathrm{Vol}(P(U)) \leqslant 2\,\mathrm{Vol}(U)$ реализуется на треугольниках (см. [114, 177] и др.), для центрально симметричных фигур оценка

$$\mathrm{Vol}(P(U)) \leqslant \frac{4}{3}\,\mathrm{Vol}(U)$$

реализуется на аффинно правильных шестиугольниках (см. [2, 102, 198]).

Относительно вписанных параллелепипедов известных фактов меньше. Отношение объема $d$-мерного тела к наибольшему из объемов содержащихся в нем параллелепипедов не превосходит $d^d$ (см. [152, 187]). На плоскости соответствующее отношение площадей не превосходит 2, это значение реализуется на треугольниках (см. [126, 221]). В $E^3$ в теле $U$ содержится куб с объемом, не меньшим $\frac{2}{9}\,\mathrm{Vol}(U)$ (см. [70]).

Пусть дан параллелепипед $P \subset U \in \Im^3$, $w_i$, $i = 1, 2, 3,$ — отношения ширины $U$ к ширине $P$ в направлении, ортогональном $i$-й грани параллелепипеда. При некоторых ограничениях на тело $U$ доказано неравенство (см. [77])

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} \geq 1. \tag{24}$$

В [174] доказано неравенство для произвольного тела $U$ в более слабой форме:

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{a_3} \geq 1.$$

Здесь предполагается, что $P = E_1 + E_2 + E_3$, где $E_i$ — ребра параллелепипеда, $i$-я грань порождается двумя ребрами с номерами, отличными от $i$, $a_3$ — отношение длины самого длинного отрезка в $U$, параллельного $E_3$, к длине ребра $E_3$.

На плоскости аналог неравенства (24) доказан для произвольной фигуры [173].

Расстояние Банаха—Мазура между любым телом $U \subset E^d$ и параллелепипедами (все параллелепипеды аффинно эквивалентны) не превосходит $d$, для центрально симметричных тел не превосходит $(d^2 - d + 1)^{1/2}$ (см. [170]). Для любой плоской выпуклой фигуры существуют внутренний и внешний гомотетичные прямоугольники, коэффициент подобия которых не превосходит 2, для $n$-угольника, координаты вершин которого отсортированы, такие прямоугольники можно построить за время, равное $O(n \ln 2)$ (см. [219]).

**5.3.** В этом пункте рассматриваются аппроксимация многогранниками простой метрической или аффинной структуры (в частности правильными многоугольниками), а также общие утверждения о вписанных и описанных многогранниках. Все вершины вписанного в $U$ многогранника принадлежат границе $\partial U$, все грани описанного являются для $U$ опорными.

На плоскости для класса выпуклых фигур $R(S, L)$, имеющих площадь не более $S$ и периметр не менее $L$ $(4\pi \leq L^2/S < 4k\,\mathrm{tg}(\pi/k),\ k \geq 3)$, полностью описаны пары правильных $k$-угольников $P_1$ и фигур $U_1 \in R(S, L)$, для которых

$$\rho_1(U_1, P_1) = \inf_{(P,U)} \rho_1(U, P)$$

(см. [123]). При $L^2/S \geq 4k\,\mathrm{tg}(\pi/k)$ задача тривиальна, поскольку такой фигурой является и правильный $k$-угольник.

Схожая аффинная задача рассмотрена в [118]. Для семейства фигур с площадью $S$ и аффинным периметром $L_a \geq p$, $p^3 \leqslant 8\pi^2 S$ (см. (17)), описаны пары таких фигур и вписанных и описанных правильных многоугольников наилучшего приближения в метрике $\rho_N$, на которых реализуется минимум расстояния для всего класса.

Во всякую выпуклую фигуру можно вписать аффинно правильный шестиугольник [14].

Пусть $U$ — выпуклая плоская фигура. $U$-длиной отрезка называется отношение евклидовых длин отрезка и параллельной ему длиннейшей хорды $U$. Доказано, что для любых $x \in \partial U$ и натурального $k \geq 3$ существует вписанный $k$-угольник с равными $U$-длинами и вершиной $x$, причем для строго выпуклой фигуры $U$ такой $k$-угольник единствен [176]. Существует треугольник, вписанный в $U$, $U$-длины которого равны и не меньше, чем $\dfrac{2 + 2\sqrt{6}}{2}$ (см. [169]), если фигура центрально симметричная, то $U$-длины сторон треугольника не меньше $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (см. [175]). Для правильного пятиугольника $U$-длины сторон равны $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (см. [171]), для шестиугольника $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. [100]). Последние результаты дают оценки $U$-длин сторон правильных треугольников снизу. Для семиугольника число $2/3$ является точной оценкой $U$-длины стороны сверху [169]. Оценка длины стороны равностороннего треугольника в иной относительной метрике получена в [115].

Приведем некоторые результаты о вписанных и описанных с точностью до гомотетии многогранниках для любых выпуклых тел [30, 31]. Среди них следующие многогранники:

(i) в $E^d$ описанный вокруг сферы многогранник с $d+2$ гранями (описанный);

(ii) в $E^{2d+1}$ выпуклая оболочка подобных симплексов, вписанных в сферы $\sum\limits_{i=1}^{2d+1} x_i^2 = 1$, $x_0 = a > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{2d+1} x_i^2 = 1$, $x_0 = b < 0$ (описанный). Частным случаем такого многогранника является трехмерный куб, этот результат был получен в [159];

(iii) в $E^d$ всякий симплекс (описанный);

(iv) в $E^3$ всякий параллелепипед, описанный вокруг шара (описанный) (см. [124]);

(v) в $E^3$ правильная четырехугольная призма для центрально симметричных тел (вписанная);

(vi) в $E^3$ выпуклая оболочка 12 точек на сфере $S^d$ (возможны любые комбинации знаков) $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(\pm a, 0, \pm\sqrt{1-a^2})$, $(\pm a, 0, \pm\sqrt{1-a^2})$ (описанный);

(vii) в $E^3$ правильная четырехугольная бипирамида для центрально симметричных тел (описанная).

В цитированных работах [30, 31] приведены и другие результаты такого рода в частности для тел постоянной ширины.

Начиная со знаменитой работы [101], многие работы посвящены анализу свойств $k$-мерных сечений $d$-мерных выпуклых тел. Приведем некоторые результаты, связанные с многогранниками.

Найдутся двумерные сечения всякого выпуклого тела $U \subset E^3$, для которых существуют вписанные или описанные правильные пятиугольники, аффинно правильные восьмиугольники [27, 28]. Пусть в теле $U$ выделена точка $x$. Существуют двумерные сечения $U$, проходящие через $x$, имеющие вписанные или описанные квадраты, аффинно правильные шестиугольники с центром в $x$ [29, 33]. Существуют двумерные сечения всякого выпуклого тела $U \subset E^d$ с вписанными правильным $2n$-угольником и аффинно правильным $2n+2$-угольником [32]. В цитированных работах получены более общие результаты, выходящие за рамки данного обзора.

**5.4.** Приведем некоторые результаты об апроксимации многогранников «усеченными» телами.

Существуют положительные константы $c_0$, $c_1(d)$, для которых при любых $0 < \varepsilon < 1/2$, $n \geq c_0^d/\varepsilon$, $P \in \Re_n^d$ существует такое подмножество $A$ вершин $P$, в котором вершин не менее $(1-2\varepsilon)n$, что для многогранника $P_1$ — выпуклой оболочки вершин $P$ без любой вершины из $A$ — выполняется неравенство

$$\frac{\mathrm{Vol}(P_1)}{\mathrm{Vol}(P)} \geq 1 - c_1(d) \cdot (en)^{-(d+1)/(d-1)}.$$

Аналогичный результат справедлив и для граней. В этом случае многогранник $P_1 \supset P$ является пересечением опорных полупространств, содержащих все грани $P$, кроме одной, величина $\mathrm{Vol}(P_1)/\mathrm{Vol}(P)$ оценивается сверху числом, близким к 1 (см. [205]).

На базе этих результатов доказано, что из вершин многогранника $P \subset E^3$ с объемом 1 можно выделить $k < n$ ($n$ — число вершин $P$) так, что для их выпуклой оболочки $Q$ выполняется неравенство

$$\rho_N(P, Q) \leqslant c\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right),$$

где $c$ — абсолютная константа [179].

В то же время в многограннике с большим числом вершин есть симплекс (с вершинами многогранника) с малым объемом. Более точно, если $U$ — многогранник в $E^d$ с $n$ вершинами, то можно выбрать вершины $U$ $\{x_0, \dots, x_d\}$ так, что

$$\operatorname{Vol}(\operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_d\}) \le c(d) n^{-(d+1)/(d-1)} \operatorname{Vol} P$$

(см. [64]).

**5.5.** Рассматривались классы многогранников с ограничениями на комбинаторную структуру, которые плотны в $\Re^d$, а тогда и в $\Im^d$.

Такими свойствами обладают многогранники из $\Re^d$, у которых все $(d-1)$-мерные грани — симплексы (см. [4], при $n = 3$ [158]), многогранники, у которых каждая вершина принадлежит $d$ граням (максимальной размерности) [211]. Плотными являются и классы многогранников, у которых ограничены как число вершин каждой грани, так и валентности вершин (см. [74] при $d=3$, [75] при $d=4$, [76] при $d \ge 5$).

**5.6.** Зонотопом в $E^d$ называется многогранник, представимый в виде суммы конечного числа отрезков. Для невырожденности требуется, чтобы отрезков было не менее $d$, причем среди отрезков должно быть $d$ линейно независимых. Таким образом, параллелепипеды являются частным случаем зонотопов. Множество зонотопов в $E^d$, представимых в виде сумм не более $n \ge d$ отрезков, обозначим через $Z_n^d$. Множество зонотопов на плоскости плотно в классе центрально симметричных фигур. При $d \ge 3$ это не так. Более того, это множество нигде не плотно в этом классе выпуклых тел. Зоноидами называются пределы зонотопов из $Z_n^d$ при $n \to \infty$. Множество зоноидов будем обозначать через $Z^d$. В частности, $B^d \in Z^d$.

Естественными являются вопросы об аппроксимационных качествах зонотопов в классе зоноидов. Установлены следующие асимптотические оценки расстояния Банаха—Мазура для любого $U \in Z^d$ при $n \to \infty$ (см. [84, 85]):

$$\delta_{BM}(U, Z_n^3) \leqslant 1 + \frac{1}{n^{5/4 - o(1)}},$$

$$\delta_{BM}(U, Z_n^4) \leqslant 1 + \frac{1}{n^{1 - o(1)}},$$

$$\delta_{BM}(U, Z_n^d) \leqslant 1 + \frac{1}{n^{d/2(d-1) - o(1)}}, \quad d \ge 5.$$

Здесь $o(1) > 0$.

Отдельно оценивалась мера приближения зонотопами шара $B^d$. Доказано, что существует универсальная константа $c$ такая, что при $n > d$

$$\frac{1}{c} \min\left\{\sqrt{d}, \sqrt{\frac{n}{n-d} \ln \frac{n}{n-d}}\right\} < \delta_{BM}(B^d, Z_n^d) < c \min\left\{\sqrt{d}, \sqrt{\frac{n}{n-d} \ln \frac{n}{n-d}}\right\}$$

(см. [130]).

Другие оценки снизу и сверху имеют вид (см. [84, 85]):

$$\delta_{BM}(B^d, Z_n^d) \ge 1 + \frac{c(d)}{n^{(d+1)/(2d-2)}};$$

существует величина $c(d)$ такая, что

$$\delta_{BM}(B^d, Z_n^d) \leqslant (1 + \varepsilon)$$

при

$$n = c(d)(\varepsilon^{-2} |\log \varepsilon|)^{(n-1)/(n+2)}, \quad 0 < \varepsilon < 1/2.$$

## 6. Случайные многогранники

**6.1.** В ряде работ рассматривается следующая задача. В выпуклом теле $U \in \Im^d$ (или на его границе) случайно выбираются $n$ точек в соответствии с некоторым законом распределения. Каковы числовые характеристики случайных величин, ассоциированных с выпуклой оболочкой этих точек? Интерес к таким задачам связан с широким распространением методов статистического моделирования, базирующихся на использовании высокопроизводительной вычислительной техники.

**6.2.** В этом пункте предполагается, что точки $x_1, \ldots, x_n$ выбираются из тела $U \in \Im^d$ объема, равного 1, по равномерному закону, независимо в совокупности. Через $P_n$ обозначена выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Рассматриваются характеристики случайной величины $\operatorname{Vol}(P_n)$, в частности, математическое ожидание $\mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_n))$. Это дает оценку средней метрики Никодима между $U$ и случайным многогранником $P_n$.

Для выпуклого тела $U \in \Im^d$ с $k$-гладкой границей, $k \geq 3$, справедлива следующая формула:

$$1 - \mathbf{E}[\operatorname{Vol}(P_n)] = \sum_{i=0}^{k-1} c_i(U) n^{-\frac{i+2}{d+1}} + O\left(n^{-\frac{k+2}{d+1}}\right) \tag{25}$$

(см. [201]). Таким образом, выпуклые оболочки $n$ случайных точек приближают выпуклое тело в метрике Никодима при увеличении $n$ с более низкой скоростью ($n^{-2/d+1}$), нежели многогранники наилучшего приближения ($n^{-2/d-1}$ (см. (15)).

Для тел с трижды гладкой границей первый коэффициент известен с точностью до множителя, зависящего от размерности:

$$c_0(U) = c(d)\sigma_a(\partial U)$$

(см. [51], для шаров [190, 227]). Как и выше, $\sigma_a(\partial U)$ — аффинная площадь поверхности (16). При расширенном понимании аффинной площади поверхности для любого выпуклого тела с гладкой границей справедлива аналогичная асимптотическая формула (см. [218]):

$$1 - \mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_n)) \sim c(d)\sigma_a(\partial U)\frac{1}{n^{2/(d+1)}}, \quad n \to \infty.$$

Если $U$ — многогранник, то

$$1 - \mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_n)) \sim c(U)\frac{(\ln n)^{d-1}}{n},$$

где $c(U)$ определяется только комбинаторной структурой $U$ (см. [58], ранние результаты в [105]).

Величина $\mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_n))$ при достаточно больших $n$ максимальна для симплексов [58]: при $d = 2$, $n = 3$ это утверждение доказано в [72], при $d = 2$, $n = 4$ — в [86], при $d = 2$, $n$ любом — в [98].

Для симплекса $U \subset E^3$ получены более точные оценки [88, 90]:

$$1 - \mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_n)) \sim \frac{3}{4}\frac{(\log n)^2}{n}, \quad 1 - \mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_4)) = \frac{13}{720} - \pi^{\frac{2}{15015}}.$$

Значение $\mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_n))$ оценивается также через объемы шапок, отсекаемых от тела плоскостями. Пусть

$$U(\varepsilon) = \{x \in U : \min \operatorname{Vol}(U \cap H) \leqslant \varepsilon,\ x \in H\},$$

где $H$ — полупространство. При достаточно больших $n$ справедлива оценка (см. [64])

$$c_1(d)\operatorname{Vol}(U(1/n)) \leq \mathbf{E}(\operatorname{Vol}(P_n)) \leq c_2(d)\operatorname{Vol}(U(1/n)).$$

Вероятностные оценки максимального объема случайных многогранников в $E^d$ с $(d+2)$ вершинами и треугольников получены в [98].

Пусть $f_0(P)$ — число вершин многогранника $P$. При случайном выборе $n$ точек в выпуклом теле $U$ величина $f_0(P_n)$ является случайной (как и выше, $P_n$ — выпуклая оболочка случайных точек). Для тел с дважды гладкой границей при $d = 2, 3$

$$\mathbf{E}\left([\operatorname{Vol}(U) - \operatorname{Vol}(P_n)] f_0(P_n)^{2/(d-1}\right) = c(d) \cdot \sigma(\partial U),$$

при $d \geq 4$ с вероятностью 1 (см. [203])

$$\lim_{n\to\infty} [\operatorname{Vol}(U) - \operatorname{Vol}(P_n)] f_0(P_n)^{2/(d-1} = c(d) \cdot \sigma(\partial U).$$

Это означает, что скорость аппроксимации случайными многогранниками совпадает с наилучшей, если рассматривать только вершины полученных многогранников.

Последнее утверждение связано с тем, что выпуклая оболочка $n$ точек, выбираемых равномерно и независимо в выпуклом теле $U \subset E^d$, с высокой вероятностью совпадает с выпуклой оболочкой $o(n)$ точек, выбираемых равномерно и независимо в малой окрестности границы $\partial U$ (см. [59]; ср. 6.3).

Если $P_n$ — выпуклая оболочка $n$ случайных точек, выбираемых из шара $B^d$, то для дисперсии Var расстояния Никодима доказана оценка (см. [163])

$$\mathrm{Var}[\rho_N(B^d, P_n)] = O\left(n^{-(d+3)/(d+1)}\right), \quad n \to \infty.$$

**6.3.** В этом пункте приводятся формулировки результатов, связанных с выбором случайных точек на границе выпуклого тела.

При тех же предположениях, что и в (25), доказана аналогичная формула

$$1 - \mathbf{E}[\mathrm{Vol}(P_n)] = \sum_{i=0}^{k-1} c_i(U) n^{-\frac{i+2}{d-1}} + O\left(n^{-\frac{k+2}{d-1}}\right)$$

(см. [202]; там же получены аналогичные результаты для интегралов поперечных мер).

Сравнение с (15) показывает, что при выборе точек на границе выпуклого тела случайно полученные многогранники в среднем будут приближать выпуклое тело оптимально по порядку, чего нельзя утверждать при случайном выборе точек из самого тела.

Пусть на границе $\partial U$ задана непрерывная положительная функция $h(x)$ — плотность распределения, и случайные точки $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ выбираются независимо в соответствии с этим распределением, как и выше, $P_n = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Для трижды гладкой границы $\partial U$ и гладкой функции $h(x)$ выполняется соотношение (см. [128])

$$\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d-1}} \rho_H(U, P_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_{n-1})} \max_{x \in \partial U} \frac{\sqrt{k_U(x)}}{h(x)}\right)^{\frac{2}{d-1}}, \quad n \to \infty.$$

Символ $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ обозначает сходимость по вероятности.

При $d = 2$ требования гладкости к границе и плотности можно опустить [216]. Эта задача рассмотрена и для интегралов поперечных мер [202].

Пусть на границе выпуклого тела $U$ независимо выбираются $n$ точек, подчиненных равномерному распределению, в этих точках проводятся опорные плоскости к $U$. Для тел с гладкой границей исследована асимптотика математических ожиданий объема, площади поверхности, средней ширины полученных случайных многогранников при $n \to \infty$ (см. [83]).

**6.4.** Здесь сформулированы результаты о других характеристиках случайных многогранников.

Приведем самые последние результаты такого типа [204]. Пусть $\overline{f}(P)$ — $d$-мерный вектор, компоненты которого равны числам граней многогранника соответствующих размерностей. Если $U \in \Re^d$, $P_n$ — выпуклая оболочка $n$ точек, выбираемых равномерно и независимо в $U$. Если $U$ — многогранник, то

$$\mathbf{E}(\overline{f}(P_n))(\ln n)^{-(d-1)} \to \overline{c}_d T(U).$$

Здесь $T(U)$ — число вершин $U$.

Для тела $U$ с дважды гладкой границей и положительной кривизной

$$\mathbf{E}(\overline{f}(P_n)) n^{(1-d)/(d+1)} \to \overline{c}_d \sigma_a(\partial U),$$

где $\sigma_a$ — аффинная площадь поверхности (16), $\overline{c}_d$ — постоянный $d$-мерный вектор.

Перечислим некоторые более ранние результаты.

Для простого многогранника $U$ (т.е. такого, валентности всех вершин которого равны $d-1$) в [41] получены оценки математических ожиданий числа граней разных размерностей случайных многогранников. Аналогичный результат для многогранников $U$ общего вида доказан в [58]. Математические ожидания чисел вершин и граней высшей размерности выпуклых оболочек случайных точек, выбираемых из многогранника, их особенности для простых многогранников рассмотрены в [104]. В [58] оценивается и математическое ожидание числа вложенных цепочек граней разных размерностей от 0 до $d-1$. Уточнения в зависимости от числа вершин многогранника $U$ приведены в [89].

Исследована асимптотика характеристик длины и площади выпуклой оболочки $n$ случайных точек, выбираемых из плоского многоугольника [93]. Для этих величин получены аналоги центральной предельной теоремы. Результаты для площади и длины оказались различными. Ранее схожие вопросы рассматривались в [87, 206]. Центральная предельная теорема для числа вершин выпуклой оболочки в этом случае получена в [136], уточнения в [120].

В [225] проанализировано поведение числа $c_1 d$-мерных граней выпуклых оболочек случайных $c_2 d$ точек в $E^d$ при $d \to \infty$.

**6.5.** К затронутой проблематике близка задача Сильвестра. В плоской области $U$ равномерно и независимо выбираются четыре точки. Какова вероятность того, что их выпуклая оболочка представляет собой четырехугольник? В [73] доказано, что минимум этой вероятности реализуется на кругах, а максимум — на треугольниках. В [54] получен следующий общий результат. Для вероятности $p(U,n)$ события «все $n$ выбранных точек являются вершинами их выпуклой оболочки» справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sqrt[n]{p(U,n)} = \frac{e^2}{4} L'_a(U)^3(\partial U).$$

Здесь $L'_a(U)$ — супремум аффинных длин (см. (17)) гладких границ выпуклых областей, содержащихся в $U$.

В [55] порядок вероятности такого события по $n$ установлен для произвольного $d$. В той же работе дана асимптотическая оценка математического ожидания числа различных выпуклых оболочек, образованных подмножествами множества $n$ случайных точек в плоском выпуклом множестве $U$. Если $T_n(U)$ — множество различных таких выпуклых оболочек, то

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/3} \ln[\operatorname{card}(T_n(U))] = 3 \cdot 2^{-2/3} L_a^3(\partial U).$$

Частичное многомерное обобщение этого факта имеет вид (см. [56])

$$c_1(d) n^{(d-1)/(d+1)} \leqslant \ln[\operatorname{card}(T_n(U))] \leqslant c_2(d) n^{(d-1)/(d+1)}. \tag{26}$$

При случайном выборе $n$ точек в параллелограмме вероятность того, что они являются вершинами выпуклого многоугольника, равна

$$\left(\binom{2n-2}{n-2}/n!\right)^2,$$

в треугольнике

$$\frac{2^n(3n-3)!}{((n-1)!)^3(2n)!}$$

(см. [223, 224]).

К этим результатам примыкает непосредственно относящееся к аппроксимации существование множества-аттрактора $U_0 \subset U$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ (см. [61])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}\left[\operatorname{card}(P \in T_n(U) : \rho_H(P,U_0) > \varepsilon)\right]}{\mathbf{E}\left[card(T_n(U))\right]} = 0.$$

Доказано также существование аттрактивной кривой в следующей задаче. В квадрате $[0,1] \times [0,1]$ случайно выбираются $n$ точек, которые вместе с точками $(0,0)$ и $(1,1)$ являются вершинами выпуклой ломаной $Q_n$. Последовательность $Q_n$ почти наверное сходится к некоторой кривой. Авторы [67] назвали этот результат «центральной предельной теоремой для кривых».

Следующий результат [99] показывает нерегулярность поведения математического ожидания числа экстремальных точек выпуклой оболочки $n$ точек, выбираемых случайно на плоскости в некоторых ситуациях. Пусть последовательность $\omega_n$ положительных чисел неограниченно возрастает, $\varepsilon > 0$. Существует плотность распределения на плоскости, инвариантная относительно поворотов вокруг начала координат, для которой при независимом выборе $n$ точек плоскости в соответствии с этим законом математическое ожидание числа вершин выпуклой оболочки для бесконечно многих значений $n$ больше $n/\omega_n$ и для бесконечно многих $n$ меньше $4 + \varepsilon$.

**6.6.** В [110] исследовались асимптотики величин $\mathbf{E}(\mathrm{Vol}(P_n))$ при $d \to \infty$, когда число точек $n$ зависит от размерности $d$. Для куба $[0,1]^d$, если $n(d)$ точек выбираются равномерно и непрерывно из множества вершин $\{0, 1\}^n$, при $d \to \infty$ имеем $\mathbf{E}(\mathrm{Vol}(P_n)) \to 0$, если $n(d) \leqslant (\kappa - \varepsilon)^d$ и $\mathbf{E}(\mathrm{Vol}(P_n)) \to 1$, если $n(d) \geq (\kappa + \varepsilon)^d$. Здесь $\kappa = 2/\sqrt{e} \approx 1{,}213$, $\varepsilon > 0$. Аналогичный результат справедлив и при выборе точек случайным образом из куба $[0,1]^d$, при этом значение $\kappa \approx 2{,}136$, т.е. справедлив аналог закона нуля и единицы.

Для шара подобные вопросы при различных функциях $n(d)$ рассмотрены в [60, 109]. Если, в частности, $2d < n < 2^d$ и $n$ точек выбираются на сфере $S^{d-1}$ независимо и равномерно, то математическое ожидание числа граней выпуклой оболочки этих точек имеет порядок $\left(\dfrac{\ln n}{d}\right)^{d/2}$ (см. [61]).

**6.7.** В [91] рассмотрена следующая задача. В выпуклой фигуре $U \subset E^2$ площади 1 равномерно и независимо выбираются $i + k$ точек. Какова вероятность $p_{ik}(U)$ того, что выпуклые оболочки первых $i$ и последних $j$ выбранных точек не пересекаются? Эта вероятность оказалась неожиданно связанной с топологическими характеристиками эквиаффинных кривых $M_s(U)$, $s \in (0,1)$. Эквиаффинная кривая $M_s(U)$ — это множество середин хорд $U$, которые разбивают область $U$ на части, площади которых равны $s$ и $1 - s$. Пусть $w(z, M_s(U))$, $z \in U \setminus M_s(U)$, — индекс кривой $M_s(U)$ относительно точки $z$. Справедливо равенство

$$p_{jk}(U) = \frac{4}{3} ik \int\limits_0^1 s^{i-1}(1-s)^{k-1} K_{[s]} ds,$$

где

$$K_{[s]} = 1 - \int\limits_{z \in U \setminus M_s(U)} w(z, M_s(U)) dz.$$

Этот результат использован для получения оценок среднего числа вершин и средней площади выпуклой оболочки случайных точек в $U$.

Другое выражение для $K_{[s]}$ получено в [200]:

$$K_{[s]} = \frac{1}{8} \int\limits_0^{2\pi} l^2(s, \varphi) d\varphi,$$

где $s = k/(i+k)$, $l(s, \varphi)$ — длина хорды в направлении $\varphi + \pi/2$, отсекающей от $U$ сегмент площади $s \in [0, 1]$.

**6.8.** Пусть в пространстве $E^d$ выбираются независимо $n$ точек в соответствии с нормальным законом. Случайный многогранник — выпуклая оболочка этих точек — называется гауссовым многогранником.

В [156] даны оценки математических ожиданий ряда геометрических характеристик гауссовых многогранников.

В [157] даны оценки дисперсии чисел граней и интегралов поперечных мер разных размерностей гауссовых многогранников $P_n$ и доказана центральная предельная теорема для этих величин при $n \to \infty$.

Пусть симплекс с равными расстояниями между вершинами, вписанный в шар $B^d$, случайно вращается вокруг точки 0 в соответствии с изотропным законом распределения на группе поворотов. Проекции симплекса на подпространство аффинно эквивалентны гауссовому многограннику (см. [50], ранний результат в [40]).

Доказаны центральные предельные теоремы для числа вершин $f_0(P_n)$, где $P_n$ — гауссов многогранник в шаре (см. [155]), для числа вершин, периметра и площади гауссова многоугольника на плоскости (см. [154]).

Рассматривались и выпуклые оболочки точек, независимо выбираемых в соответствии с другими законами распределения (см., например, [188]).

## 7. Решетки

**7.1.** Ряд вопросов, связанных с расположением точек решеток в выпуклых телах (в частности их выпуклых оболочек), оказывается тесно связанным с результатами, приведенными в предыдущем разделе. К таковым относится, например, существование множеств-аттракторов. Символ $LA_m^d$ ($m$ — натуральное число) означает множество точек в $E^d$ с координатами вида $(a_1/m, \ldots, a_d/m)$, где $a_i$ — целые числа.

**7.2.** Пусть $U \in \Im^d$, $N_m(U) = \operatorname{card}(U \cap LA_m^d)$. Очевидно, что

$$N_m(U) = (1 + o(1))m^d \operatorname{Vol}(U), \quad m \to \infty.$$

Для числа различных выпуклых многогранников $Q_m(U)$ с вершинами в этих точках справедливо соотношение (см. [69])

$$c_1(d)(N_m(U))^{(d-1)/(d+1)} \leqslant \ln(Q_m(U))) \leqslant c_2(d)(N_m(U))^{(d-1)/(d+1)}.$$

Сравнение этой формулы с (26) показывает, что порядок числа различных многогранников тот же, что и при случайном выборе точек.

Для плоскости получен более сильный результат (см. [10, 52, 53]):

$$\lim_{m\to\infty} m^{-2/3} \ln(Q_m(U)) = 3\sqrt[3]{\frac{\varsigma(3)}{4\varsigma(2)}} L'_a(U).$$

Здесь $\varsigma$ — дзета-функция Римана, $L'_a(U)$, как и выше, — супремум аффинных длин гладких границ выпуклых областей, содержащихся в $U$.

**7.3.** Пусть $U \in \Im^d$ — тело с трижды гладкой границей и положительной кривизной, $f_i(P_U)$ — число $i$-мерных граней выпуклой оболочки множества $P_U = U \cap LA_1^d$. Тогда

$$c_1(d)\lambda^{d(d-1)/(d+1)} \leqslant f_0(P_{\lambda U}) \leqslant c_2(d)\lambda^{d(d-1)/(d+1)}$$

при любом $\lambda > 0$. В [63] этот результат получен для шаров, в [56] отмечено, что результат переносится на общий случай.

Число целочисленных точек, расположенных на границе выпуклой оболочки множества $P_{\lambda U}$, также имеет порядок $\lambda^{d(d-1)/(d+1)}$ по $\lambda$ (см. [57]).

Число вершин $f_0(P_U)$ оценивалось также в [1, 47]; в [43] получена оценка

$$f_0(P_U) \leqslant C(d) \operatorname{Vol}(U)^{(d-1)/(d+1)}.$$

Для круга на плоскости с центром в 0 более точные оценки получены в [48]:

$$0{,}3\lambda^{2/3} \leqslant f_0(P_{\lambda B^2}) \leqslant 5{,}5\lambda^{2/3}.$$

Определенное развитие этого результата (в том числе на высшие размерности) в [49].

**7.4.** Одним из самых удивительных явлений, обнаруженных в последние десятилетия, являются аттракторы семейств многогранников с вершинами-узлами решетки (термин не является общепринятым). Определим соответствующее понятие в конкретной ситуации. Рассматриваются множества выпуклых многогранников $\Sigma_m$ с вершинами в точках решетки $LA_m^d$. В описанных далее случаях для всякого $m$ существует $n > m$, для которого $\Sigma_m \subset \Sigma_n$, т.е семейства в некотором смысле расширяются. Выпуклая область $U_0$ называется аттрактором совокупности $\{\Sigma_m\}$, если для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{P \in \Sigma_m : \rho_H(P, U_0)) < \varepsilon\}}{\operatorname{card}(\Sigma_m)} = 1.$$

Приведем известные примеры аттракторов.

$\Sigma_m$ — множество выпуклых многоугольников в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$ с вершинами из $LA_m^d$. Аттрактор — область $\sqrt{1 - |x|} + \sqrt{1 - |x|} \leqslant 1$, ограниченная четырьмя кусками парабол (см. [10], вероятностное доказательство [35]).

$\Sigma_n$ — множество выпуклых многоугольников с вершинами из $LA_m^d$, расположенных в произвольном многоугольнике Аттрактор — выпуклое множество, граница которого состоит из кусков парабол и прямолинейных отрезков (см. [52]).

$\Sigma_n$ — множество выпуклых многоугольников на плоскости с вершинами из $LA^d_m$, центр тяжести которых — точка 0, а площадь фиксирована. Для каждого многоугольника $P \in \cup\Sigma_n$ существует такое линейное преобразование $A_P$, сохраняющее площадь, что аттрактором многоугольников $A_P(P)$ является круг соответствующей площади с центром 0 (см. [226]).

Многомерные обобщения приведенных результатов неизвестны, причины обозначены в [11].

**7.5.** В [65] рассмотрена следующая задача, связанная с предыдущим разделом. Пусть $U \in \Im^d$. Анализируется математическое ожидание числа вершин многогранников $f_0(P_{SU})$, где $S$ — случайное собственное движение пространства $E^d$ (распределение предполагается равномерным в соответствующем пространстве). Оказывается, эта величина близка к $f_0(P_U)$, если тело $U$ имеет достаточно большие отношение радиусов вписанного и описанного шаров и объем. На плоскости анализировалось среднее расстояние Никодима между $U$ и $\operatorname{conv}(SU \cap LA^2_1)$. Оказалось, что для многоугольников эта величина может сильно отличаться от $\rho_N(U, \operatorname{conv}(U \cap LA^2_1)$.

Если $A(n)$ — минимальная из площадей многоугольников с $n$ вершинами из решетки $LA^2_1$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)n^3$, причем указан конечный набор экстремальных задач (их порядка $10^{10}$), решив которые этот предел можно найти (см. [68]).

**7.6.** Для задач булевского программирования важнейшую роль играют $(0,1)$-многогранники в $E^d$, т.е. выпуклые оболочки множеств вершин куба $[0,1]^d$. О таких многогранниках уже говорилось в п. 6.6. Максимальное число граней $f_0(d)$, которые может иметь такой многогранник, удовлетворяет неравенствам (см. [121, 230])

$$2^d \leqslant f_0(d) \leqslant 2d!.$$

Кроме того, существует константа $c$, для которой (см. [66])

$$f_0(d) \geq \left(c\frac{d}{\ln d}\right)^{d/2}.$$

**7.7.** В теории оптимизации выпуклый многогранник обычно задается в форме системы линейных неравенств. С вычислительной точки зрения важна информационная сложность такого многогранника. Многогранник $U$ называется рациональным, если его можно представить системой линейных неравенств с целыми коэффициентами. Сложностью такого многогранника $\varphi(U)$ называется общее число бит, которые необходимы для записи этой системы неравенств. Число вершин многогранника с целочисленными вершинами удовлетворяет неравенству $f_0(P_U) \leqslant c(d)m^d\varphi^{d-1}(U))$ (см. [97], ранние результаты в [39, 153]); по $\varphi(U)$ порядок точный (см. [62]).

## 8. Алгоритмы

**8.1.** С конструктивной точки зрения задача аппроксимации многогранниками состоит в следующем. По заданному выпуклому телу построить многогранник с $n$ вершинами или гранями, приближающий тело наилучшим образом в той или иной метрике. Построить означает выписать либо координаты вершин, либо систему линейных неравенств. В такой постановке задача решается очень редко и только в плоском случае. Например, для круга это будут правильные многоугольники.

Ограничиваются более скромной задачей построения асимптотически оптимальной последовательности: построить последовательность многогранников $P_n$, для которой

$$\rho(P_n, U) \sim \delta(U, \Sigma_n), \quad n \to \infty.$$

Здесь $\Sigma_n$ — рассматриваемый класс многогранников, метрика может быть любой. Если такая последовательность $P_n$ сформирована, то по заданной точности находится значение $n$, на котором процесс надо остановить.

Такую последовательность тоже построить трудно, поэтому строится последовательность асимптотически оптимальная по порядку, т.е. такая, для которой

$$\rho(P_n, U) \leqslant \frac{c(U))}{n^{2/(d-1)}}.$$

Следует отметить, что асимптотические результаты раздела 4 получены с помощью описания и обоснования тех или иных асимптотически оптимальных конструкций. Для практического использования эти конструкции обычно неприменимы. Разумеется, для практики наиболее важны случаи $d = 2$ и $d = 3$.

Алгоритмы многогранной аппроксимации могут быть итеративными, когда вершины или грани строятся последовательно в зависимости от того, что получено ранее, и неитеративными, когда вершины или грани в нужном количестве задаются сразу.

В качестве исходной информации могут быть заданы

(i) уравнение границы тела;
(ii) координаты вершин исходного многогранника;
(iii) линейные неравенства, задающие исходный многогранник;
(iv) алгоритм вычисления опорной функции и др.

Важной характеристикой алгоритма является его временная сложность, т.е. число элементарных операций, необходимых для решения задачи в зависимости от исходных данных. Под исходными данными могут пониматься

(i) числа вершин исходного и аппроксимирующего многогранников;
(ii) требуемая точность приближения;
(iii) число бит, необходимое для записи исходной информации;
(iv) число вычислений какой-либо функции и др.

**8.2.** Приведем два подхода к построению асимптотически оптимальных неитеративных алгоритмов аппроксимации. Асимптотически оптимальную последовательность аппроксимирующих многоугольников на плоскости можно построить на основе формулы (10). Для построения многоугольников наилучшего приближения в метриках $\rho_H$, $\rho_N$ следует специальным образом подбирать функцию плотности $h : \partial U \to R^+$, в соответствии с которой следует распределить на границе области вершины вписанного или точки касания сторон описанного многоугольников [181, 189]. Алгоритм является сложным при численной реализации.

Еще один асимптотически оптимальный алгоритм для метрик $\rho_H$, $\rho_N$ основан на следующей идее. Сформулируем ее для вписанных многоугольников. Каждая сторона многоугольника отсекает от $U$ сегмент. Можно измерить соответствующий параметр сегмента (для метрики $\rho_N$ площадь сегмента, для метрики $\rho_H$ — максимум расстояния от точек части границы $\partial U$ до соответствующей стороны многоугольника). Если выбрать при $n = 3, 4, \ldots$ вершины вписанных $n$-угольников так, чтобы для всех сегментов эти параметры совпадали, то полученная последовательность асимптотически оптимальна (см. [189]). Этот алгоритм также является сложным при численной реализации.

**8.3.** Основная идея итеративных алгоритмов внутренней многогранной аппроксимации выпуклого тела $U$ состоит в построении на каждой итерации многогранника $P_{n+1} = \mathrm{conv}(P_n \cup \{x_{n+1}\})$, где $x_{n+1}$ — специальным образом подобранная точка $U$, обычно $\partial U$.

При внешней аппроксимации многогранник $Q_{n+1}$ является пересечением $Q_n$ с опорным полупространством тела $U$ в точке $x_{n+1}$.

В предположении возможности вычисления опорной функции тела $U$ в любом направлении развит вариант такого подхода, названный методом улучшения оценок [9]. В этом методе точка $x_{n+1} \in \partial U$ лежит в опорной плоскости, параллельной грани $P_n$, для которой достигает максимума величина $h_{P_n}(u) - h_U(u))$ на множестве векторов $u \in S^d$ внешних нормалей к граням $P_n$. Начальный многогранник (симплекс) может строиться разными методами, например, с использованием алгоритма из [38].

В [18] выделено важное свойство итеративных алгоритмов аппроксимации. Алгоритм называется хаусдорфовым, если при некотором $\gamma > 0$ построенная последовательность многогранников обладает свойством

$$\rho_H(P_{n+1}, P_n) \geq \gamma \rho_H(U, P_n).$$

Хаусдорфовость гарантирует асимптотическую оптимальность приближения по порядку.

Схема улучшения оценок для тел с дважды гладкой границей и положительной кривизной приводит к хаусдорфову алгоритму [19, 20]. Оценки качества сходимости (в том числе при различных вариантах выбора точек $x_{n+1}$) уточнялись в [6–8, 15, 16, 18]; для тел, граница которых не является гладкой, оценки скорости сходимости алгоритмов улучшения оценок получены в [22, 23]. Численное исследование метода для 2-, 3- и 4-мерных эллипсоидов описано в [13].

**8.4.** Для практики полезны итеративные алгоритмы, которые одновременно строят внутренние и внешние аппроксимации. Для плоских выпуклых фигур это вариант известного метода хорд и касательных, который в данном случае называется алгоритмом сэндвича. Поскольку граница выпуклой фигуры часто задается функционально, опишем суть алгоритма для выпуклой функции $f(x)$ с конечными левой и правой производными, заданной на отрезке $[a, b]$ (см. [92, 125, 207, 208, 220]).

На начальном шаге строятся линейная и кусочно линейная функции

$$u_0(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad l_0(x) = \min\{f(a) + f'^{+}(a)(x - a),\ f(b) + f'^{-}(b)(x - b)\}.$$

Затем на отрезке $[a, b]$ выбирается точка $c$; для этого могут применяться следующие правила:

а) бисекция $c = (a + b)/2$;

б) в точке $(c, f(c))$ прямая с наклоном $(f'^{+}(a) + f'^{-}(b))/2$ является опорной к надграфику функции $f(x)$;

в) число $c$ является корнем уравнения $f(a) + f'^{+}(a)(c - a) = f'^{-}(b)(c - b)$, т.е. это абсцисса точки пересечения прямых, определяющих график функции $l_0(x)$;

г) в точке $(c, f(c))$ прямая с наклоном $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является опорной к надграфику функции $f(x)$.

Построение, аналогичное начальному на каждом из отрезков $[a, c]$, $[c, b]$, приводит к кусочно линейным функциям $u_1(x)$, $l_1(x)$, определенным на отрезке $[a, b]$, для которых $u_1(x) \geq f(x) \geq l_1(x)$.

Затем выбирается тот из отрезков, на котором достигает максимума разность $u_1(x) - l_1(x)$ (это требует вычислений в конечном числе точек), этот отрезок делится в соответствии с выбранным правилом. Затем по тому же принципу выбирается один из трех отрезков и т. д.

После $n$ шагов построены кусочно линейные функции $u_n(x)$, $l_n(x)$, для которых $u_n(x) \geq f(x) \geq l_n(x)$. Качество приближения, которое обеспечивает данная процедура при $n \geq 2$, имеет оценки

$$\|u_n - l_n\|_\infty \leqslant \frac{9(f'^{-}(b) - f'^{+}(a))(b - a)}{8n^2},$$

при использовании процедур а) и б),

$$\|u_n - l_n\|_\infty \leqslant \frac{(f'^{-}(b) - f'^{+}(a))(b - a)}{n^2}$$

при использовании процедур в) и г). Соответствующие оценки справедливы для метрики Хаусдорфа между соответствующими областями, например,

$$\{(x, y) : x \in [a, b],\ y \in [f(x), M]\}$$

при достаточно большом значении $M$.

Для выпуклых функций двух переменных аналогичный алгоритм построен в [220].

Многомерным обобщением алгоритма сэндвича является алгоритм сближающихся многогранников [21] — модификация метода уточнения оценок. Как и в п. 8.4, предполагается, что доступна процедура вычисления опорной функции $h_U(u)$ выпуклого тела $U$ в любом направлении $u \in S^d$ и нахождения какой-нибудь точки границы $x \in \partial U$, для которой $(x, u) = h_U(u)$. Идея алгоритма состоит в следующем. Предполагаются известными произвольные начальные многогранники (с непустой внутренностью) $P_0 \subset U \subset Q_0$. Пусть построены многогранники $P_n \subset U \subset Q_n$. Находится величина

$$s = \max_u (h_{Q_n}(u) - h_{P_n}(u)),$$

где $u$ пробегает множество единичных внешних нормалей к граням $P_n$, вектор $u_0$, на котором максимум реализуется, и точка $x_{n+1} \in \partial U$, для которой $(x_{n+1}, u_0) = h_U(u_0)$. Затем строятся многогранники

$$P_{n+1} = \mathrm{conv}\{x_{n+1}\} \cup P_n, \quad P_{n+1} = Q_n \cap H_U(x_{n+1}).$$

Здесь $H_U(x)$ — соответствующее опорное полупространство. Для тел с дважды гладкой границей и положительной кривизной доказана асимптотическая оптимальность по порядку построенных последовательностей по числу вершин и по объему вычислений.

В [17] внешняя многогранная аппроксимация строится через внутреннюю аппроксимацию полярного множества, последняя строится алгоритмом, изложенным в п. 8.4.

В [24, 25] предлагаются итеративные алгоритмы вписанной и описанной многогранной аппроксимации тела $U$, если можно вычислить как опорную, так и дистанционную функции в любом направлении $u \in S^n$. Дистанционная функция в предположении $0 \in \mathrm{Int}(U)$ ($\mathrm{Int}$ — внутренность) определяется формулой

$$\varphi(u) = \max\{t : tu \in U\}.$$

Предложенные алгоритмы обеспечивают асимптотически оптимальную по порядку аппроксимацию за минимально возможное число вычислений.

**8.5.** Задачи, связанные с анализом выпуклых многогранников, могут быть трудными в смысле $NP$-теории. Предполагается, что информация о многограннике (координаты вершин или коэффициенты в системе неравенств, размерности и т. д.) закодированы единообразно. Задача вычисления объема выпуклого многогранника $U$, заданного координатами вершин или системой линейных неравенств, является $NP$-трудной (см. [106]). Задача вычисления смешанного объема зонотопа с другими телами может быть простой с вычислительной точки зрения, в то время как задача вычисления объема зонотопа является $NP$-трудной (см. [111]). Для приближенного вычисления объема выпуклого тела недетерминированные алгоритмы, в отличие от детерминированных, эффективны (см. [107]).

Построен недетерминированный алгоритм следующего типа. Пусть $U \in \Im^d$, $\varepsilon > 0$, причем для описания тела $U$ требуется $\varphi(U)$ бит, а отношение радиусов вписанного и описанного шаров $U$ достаточно велико. За время, полиномиально выражающееся через $\varphi(U)$ и $1/\varepsilon$, алгоритм с вероятностью не менее $1-\varepsilon$ строит симплексы $\Delta$, $\Delta'$, гомотетичные относительно общего центра тяжести с коэффициентом $d+3$, такие, что $\Delta \subset U \subset \Delta'$ (см. [116]).

Недетерминированные полиномиальные алгоритмы приближенного вычисления объема многогранника приведены также в [108, 160, 180].

В [134] доказана $NP$-трудность задачи построения $j$-мерного симплекса максимального объема соответствующей размерности, содержащегося в $d$-мерном многограннике $j < d$. При этом в случае несовпадения классов $P$ и $NP$ с помощью детерминированного алгоритма полиномиальной сложности нельзя построить $j$-мерный симплекс, объем которого менее чем в 1,09 раз больше минимально возможного.

**8.6.** Приведем (неполную) сводку задач многогранной аппроксимации, для решения которых построены детерминированные и недетерминированные (с оракулом) алгоритмы полиномиальной сложности от входных данных.

В [209] предложен детерминированный алгоритм построения треугольника максимальной площади, вписанного в плоский выпуклый многоугольник линейной (относительно числа вершин многоугольника) сложности.

В [194] построен детерминированный алгоритм линейной от $n$ сложности, строящий треугольник минимальной площади, который содержит $n$ точек плоскости (ранее задача рассматривалась в [165]).

Алгоритмы построения $k$-угольников, описанных и вписанных для плоского $n$-угольника $n > k$, обеспечивающие оптимальную по порядку аппроксимацию в метрике Никодима за время $O(n + (n-k)\log n)$, построены в [178].

Построен детерминированный алгоритм временной сложности порядка $n^4$, результатом работы которого является симплекс минимального объема, содержащий $n$ точек в $E^3$ (см. [229]). Построен также алгоритм, строящий симплекс, объем которого не более чем в $(1+\varepsilon)$ раз больше минимального временной сложности $O\left(n + \dfrac{1}{\varepsilon^6}\right)$.

Известен детерминированный алгоритм сложности $O(n^3)$ для построения параллелепипеда минимального объема, содержащего $n$ точек пространства (см. [193]).

Пусть на плоскости выделено два множества точек, в общей сложности $n$ штук. Рассматривалась задача построения выпуклого многоугольника с вершинами в точках первого множества, не содержащего точек второго множества. Построен детерминированный алгоритм сложности $O(n^3 \log n)$, результатом работы которого является такой многоугольник максимальной площади. Если дополнительно число вершин многоугольника не должно превышать $M$, то алгоритм имеет сложность $O(Mn^3 \log n)$. Получены и оценки сложности параллельных алгоритмов решения задачи при разном числе процессоров (см. [119]).

В [168] построен детерминированный алгоритм приближенного восстановления выпуклой плоской фигуры по ее проекциям на несколько прямых. Результатом работы алгоритма является либо конечное множество аппроксимаций фигуры, либо информация о несуществовании фигуры. Даны априорные и апостериорные оценки расстояния между исходным и восстановленным телами.

В [46] приводится детерминированный алгоритм вычисления расстояния Хаусдорфа между плоскими пересекающимися многоугольниками с числом вершин $n_1$ и $n_2$ сложности $O(\max\{n_1, n_2\})$ и не пересекающимися сложности $O(n_1 + n_2)$.

Пусть $U$ — выпуклый многоугольник с $n$ вершинами. В [42] разработан алгоритм, который по $\varepsilon > 0$ позволяет строить многоугольники $P_1$, $P_2$, имеющие оси симметрии и такие, что

$$P_1 \subset U \subset P_2, \quad \mathrm{Vol}(P_1) > (1-\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(U), \quad \mathrm{Vol}(P_2) < (1+\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(U),$$

сложности соответственно

$$O\left(n + \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\right), \quad O\left(n + \frac{1}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Если при этом координаты вершин $U$ заданы отсортированными, то сложность в обоих случаях можно улучшить до

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\log n + \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\right), \quad O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log n + \frac{1}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

соответственно.

В [96] предложен недетерминированный алгоритм, который для трехмерного многогранника объема 1 с $n$ вершинами строит многогранник с $k < n$ вершинами, близкий в метрике Хаусдорфа к такому многограннику наилучшего приближения, за время $O(k^2 n \ln n \cdot \ln(n/k)$. Аналогичная задача для метрики Никодима рассмотрена в [179]. Вписанные (описанные) многогранники с меньшим числом вершин (граней) $k$, оптимально по порядку аппроксимирующие многогранники с $n$ вершинами (гранями) в $E^3$, можно построить за время $O(n-k)$ при использовании недетерминированного и за время $O(n)$ — детерминированного алгоритмов. Основная идея состоит в последовательном удалении вершин или граней на основе цитированных результатов работы (см. [205]).

В [94] строятся приближения шара звездными многогранниками с использованием нейросетевой идеологии.

**8.7.** Пусть на границе выпуклого тела $U$ задана последовательность точек $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Рассмотрим две последовательности многогранников $P_{i,n}(U) = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $P_{o,n}(U)$ — пересечение полупространств, полярных к $U$ в точках $x_1, \ldots, x_n$. Естественным является вопрос о скорости сходимости этих многогранников к $U$ в той или иной метрике в случае, когда последовательность является всюду плотной на $\partial U$.

Скорость сходимости определяется поведением параметра последовательности, который называется дисперсией. Если $M$ — метрическое пространство с метрикой $\rho$ и $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset M$, то дисперсия — это величина

$$d_n(X) = \inf\left\{a : M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, a)\right\}.$$

Здесь $B(x_i, a)$ — шар с центром $x_i$ и радиусом $a$. Последовательность является всюду плотной, если $d_n(X) \to 0$. В кубе $[0,1]^d$ построена последовательность (см. [191]), для которой

$$d_n(X) \geq \frac{c(d)}{n^{1/d}}.$$

Пусть тело $U$ имеет дважды гладкую границу с положительной кривизной. Будем считать, что на $\partial U$ задана риманова метрика. Тогда (см. [143])

$$\rho_H(U, P_{i,n}(U)) \sim \rho_H(U, P_{o,n}(U)) \sim \frac{d_n(X)^2}{2}, \quad n \to \infty.$$

При этом существует такая последовательность $Y$ (с дисперсией, имеющей указанную асимптотику), для которой

$$\rho_H(U, P_{i,n}(U)), \quad \rho_H(U, P_{o,n}(U)) \leqslant \frac{c(U)}{n^{2/(d-1)}}.$$

Те же результаты справедливы для $\rho_N$ и $\rho_{BM} - 1$. Асимптотические формулы типа (7) получены на основе подобных конструкций.

## 9. Заключение

**9.1.** Следует обратить внимание на различие аппроксимации тел с гладкими границами вписанными и описанными многогранниками. В метрике Хаусдорфа первые члены асимптотики для качества приближения вписанными многогранниками с $n$ вершинами и описанными с $n$ гранями совпадают (7), вторые члены асимптотики показывают, что внутренняя аппроксимация оказывается качественнее (8), (9). В метрике Никодима уже на уровне первого члена асимптотики внешнее приближение оказывается качественнее (14), (15). Задачи о нахождении универсальных описанных многогранников существенно проще, нежели для вписанных. Классический пример: существование квадрата, описанного вокруг всякой замкнутой простой кривой, почти очевидно, существование квадрата, вписанного в дважды гладкую замкнутую кривую, составляет содержание нетривиальной теоремы Л. Г. Шнирельмана. Можно ли ослабить требования к гладкости кривой, автору не известно. Известно намного больше об описанных многогранниках, нежели о вписанных, это следует и из приведенной сводки в п. 5.3.

**9.2.** Остаются открытыми вопросы о качестве многогранной аппроксимации строго выпуклых тел, граница которых не является дважды гладкой. В ряде других рассмотренных вопросов результаты получены либо для тел с достаточно гладкой границей, либо для многогранников.

**9.3.** В начале 20 в. была доказана теорема выбора В. Бляшке о существовании сходящейся подпоследовательности во всякой ограниченной последовательности выпуклых тел. В конце 20 в. оказалось, что сходится почти любая последовательность многоугольников, выбираемых наудачу из достаточно широких вложенных классов (теоремы А. М. Вершика и И. Бараньи).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Арнольд В. И.* Статистика целочисленных выпуклых многоугольников// Функц. анал. прилож. — 1980. — *14*. — С. 1–3.
2. *Бабенко И. К.* Асимптотический объем торов и геометрия выпуклых тел// Мат. заметки. — 1988. — *44*. — С. 177–190.
3. *Бляшке В.* Круг и шар. — М.: Наука, 1967.
4. *Бронштейн Е. М.* Экстремальные выпуклые функции// Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*. — С. 10–18.
5. *Бронштейн Е. М., Иванов Л. Д.* Приближение выпуклых множеств многогранниками// Сиб. мат. ж. — 1975. — *16*. — С. 1110–1112.
6. *Бурмистрова Л. В.* Исследование нового метода аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками/ Сообщ. по прикл. мат. — ВЦ РАН, 1999.
7. *Бурмистрова Л. В.* Исследование нового метода аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2000. — *40*. — С. 1475–1490.
8. *Бушенков В. А.* Итерационный метод построения оптимальных проекций выпуклых многогранных множеств// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1985. — *25*. — С. 1285–1292.
9. *Бушенков В. А., Лотов А. В.* Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. — ВЦ АН СССР, 1982.

10. *Вершик А. М.* Предельная форма выпуклых целочисленных многоугольников и смежные вопросы// Функц. анал. прилож. — 1994. — *28.* — С. 16–25.
11. *Вершик А. М.* Предельные формы типичных геометрических конфигураций и их приложения// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2001. — *280.* — С. 73–100.
12. *Георгиев П.* Апроксимиране на изнъкнали $n$-ъгълници с $n-1$-ъгълници// Мат. и мат. образов/ Докл. 13 пролет. конф. Союза мат. Бълг., 1984. — С. 289–303.
13. *Джолдыбаева С. М., Каменев Г. К.* Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1992. — *32.* — С. 857–866.
14. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. — М.: Наука, 1971.
15. *Ефремов Р. В.* Оценка эффективности адаптивного алгоритма аппроксимации выпуклых гладких тел в двумерном случае// Вестн. МГУ. Сер. 15. — 2000. — № 2. — С. 29–32.
16. *Ефремов Р. В., Каменев Г. К.* Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2002. — *42.* — С. 23–32.
17. *Ефремов Р. В., Каменев Г. К., Лотов А. В.* Построение экономичного описания многогранника на основе теории двойственности выпуклых множеств// Докл. РАН. — 2004. — *399.* — С. 594–596.
18. *Каменев Г. К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1992. — *32.* — С. 136–152.
19. *Каменев Г. К.* Об эффективности хаусдорфовых алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1993. — *33.* — С. 796–805.
20. *Каменев Г. К.* Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1994. — *34*, № 4. — С. 521–528.
21. *Каменев Г. К.* Алгоритм сближающихся многогранников// *Ж. вычисл. мат. мат. физ.* — 1996. — *36.* — С. 134–147.
22. *Каменев Г. К.* Эффективные алгоритмы внутренней полиэдральной аппроксимации негладких выпуклых тел// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1999. — *39.* — С. 423–427.
23. *Каменев Г. К.* Об аппроксимационных свойствах негладких выпуклых дисков// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2000. — *40.* — С. 1464–1474.
24. *Каменев Г. К.* Метод полиэдральной аппроксимации выпуклых тел,оптимальный по порядку числа расчетов опорной и дистанционной функции// Докл. РАН. — 2003. — *388.* — С. 309–311.
25. *Каменев Г. К.* Самодвойственные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2003. — *43.* — С. 1123–1137.
26. *Кашин Б. С.* О параллелепипедах минимального объема, содержащих выпуклое тело// Мат. заметки. — 1989. — *45.* — С. 134–135.
27. *Макеев В. В.* Вписанные и описанные многогранники выпуклого тела и связанные с ними задачи// Мат. заметки. — 1992. — *51.* — С. 67–71.
28. *Макеев В. В.* Вписанные и описанные многогранники выпуклого тела// Мат. заметки. — 1994. — *55.* — С. 128–130.
29. *Макеев В. В.* Об аппроксимации плоских сечений выпуклого тела// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1997. — *246.* — С. 174–183.
30. *Макеев В. В.* Трехмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклого компакта// Алгебра анализ. — 2000. — *12.* — С. 1–15.
31. *Макеев В. В.* Трехмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклого компакта, II// Алгебра анализ. — 2001. — *13.* — С. 110-133.
32. *Макеев В. В.* О некоторых комбинаторно-геометрических задачах для векторных расслоений// Алгебра анализ. — 2002. *14.* — С. 169–191.
33. *Макеев В. В., Мухин А. С.* О существовании общего сечения для нескольких выпуклых компактов, имеющего заданные свойства// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1999. — *261.* — С. 198–203.
34. *Попов В. А.* Апроксимиране на изнъкнали множеств// Изв. Мат. ин-т Бълг. АН. — 1970. — *11.* — С. 67–80.
35. *Синай Я. Г.* Вероятностный подход к анализу статистики выпуклых ломаных// Функц. анал. прилож. — 1994. — *28.* — С. 16–25.
36. *Фейеш Тот Л.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматгиз, 1958.
37. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966.
38. *Черных О. Л.* О построении выпуклой оболочки конечного множества точек при приближенных вычислениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1988. — *28.* — С. 1386–1396.
39. *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного линейного программирования. — М.: Физматлит, 1995.

40. *Affentranger F. Schneider R.* Random projections of regular simplices// Discr. Comput. Geom. — 1992. — *7.* — C. 219–226.
41. *Affentranger F., Wieaker J.* On the convex hull of uniform random points in a simple d-polytope// Discr. Comput. Geom. — 1991. — *6.* — C. 291–305.
42. *Ahn H.-K., Brass P., Cheong O., Na H.-S., Shin C.-S., Vigneron A.* Approximation algorithms for inscribing or circumscribing an axially symmetric polygon to a convex polygon// Computing and Combinatorics/ Proc. 10th Annual Int. Conference. COCOON 2004, Jeju Island, Korea, August 17-20, 2004. — Berlin: Springer-Verlag. — Lect. Notes Computer Sci. — *3106.* — C. 259–267.
43. *Andrews G. E.* Alower bound for the volume of strictly convex bodies with many boundary lattice points// Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — *106.* — C. 270–279.
44. *Asplund E.* Comparision of plane symmetric convex bodies and parallelograms// Math. Scand. — 1960. — *8.* — C. 171–180.
45. *Atallah M. J.* A linear time algorithm for the Hausdorff distance between convex polygons// Inf. Process. Lett. — 1983. *17.* — C. 207–209.
46. *Atallah M. J., Ribeiro C. C., Lifschitz S.* A linear time algorithm for the computation of some distance functions between convex polygons// RAIRO, Rech. Oper. — 1991. — *25.* — C. 413–424.
47. *Balog A., Bárány I.* On the convex hull of the integer points in a disc// Discr. Comput. Geom. — 1991. — *6.* — C. 39–44.
48. *Balog A., Bárány I.* On the convex hull of the integer points in a disk// Discr. Comput. Geom. — 1992. — *6.* — C. 39–44.
49. *Balog A., Deshorlies J.-M.* On some convex lattice polytopes// In: «Number Theory in Progress». — de Gruyter, 1999. — C.591–606.
50. *Baryshnikov Yu. M., Vitale R. A.* Regular simplices and Gaussian samples// Discr. Comput. Geom. — 1994. — *11.* — C. 141–147.
51. *Bárány I.* Random polytopes in smooth convex bodies// Mathematica. — 1992. — *39.* — C. 81–92.
52. *Bárány I.* The limit shape of convex lattice polygons// Discr. Comput. Geom. — 1995. — *13.* — C. 270–295.
53. *Bárány I.* Affine perimeter and limit shape// J. Reine Angew. Math. — 1997. — *484.* — C. 71–84.
54. *Bárány I.* Sylvester's question: the probability that $n$ points are in convex position// Ann. Probab. — 1999. — *27.* — C. 2020–2034.
55. *Bárány I.* A note on Sylvester's four-point problem// Stud. Sci. Math. Hung. — 2001. — *38.* — C. 73–77.
56. *Bárány I.* Random points, convex bodies, lattices// In: Proc. Int. Conf. Math. — 2002. — — *3.* — C. 527–535.
57. *Bárány I., Böröczky K. Jr.* Lattice points on the boundary of the integer hull// In: «Discrete Geometry» In honor of W. Kuperberg's 60th birthday. — NY: Marcel Dekker/ Pure Appl. Math. — 2003. — *253.* — C. 33–47.
58. *Bárány I., Buchta C.* Random polytopes in a convex polytope, independence of shape, and concentration of vertices// Math. Ann. — 1993. — *297.* — C. 467–497.
59. *Bárány I., Dalla L.* Few points to generate a random polytope// Mathematika. — 1997. — *44.* — C. 325–331.
60. *Bárány I., Füredi Z.* Approximation of the sphere by polytopes having few vertices// Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. *102.* — C. 651–659.
61. *Bárány I., Füredi Z.* On the shape of the convex hull of random points// Probab. Theory Rel. Fields. — 1988. *77.* — C. 231–240.
62. *Bárány I., Howe R., Lovász L.* On integer points in polyhedra: A lower bound// Combinatorica. — 1992. — *12.* — C. 135–142.
63. *Bárány I., Larman D. G.* The convex hull of the integer points in the large ball// Math. Ann. — 1998. — *312.* — C. 167–181.
64. *Bárány I., Larman D. G.* Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes// Mathematika. — 1988. — *35.* — C. 274–291.
65. *Bárány I., Matousek J.* The randomized integer convex hull// Discr. Comput. Geom. — 2005. — *33.* — C. 3–25.
66. *Bárány I., Pór A.* On 0-1 polytopes with many faces// Adv. Math. — 2001. — *161.* — C. 209–228.
67. *Bárány I., Rote G., Steiger W., Zhang C.-H.* A central limit theorem for convex chains in the square// Discr. Comput. Geom. — 2000. — *23.* — C. 35–50.
68. *Bárány I., Tokushige N.* The minimum area of convex lattice $n$-gons// Combinatorica. — 2004. — *24.* — C. 171–185.
69. *Bárány I., Vershik A. M.* On the number of convex lattice polytopes// GAFA J. — 1992. — *2.* — C. 381–393.

70. *Bielecki A., Radziszewski K.* Sur les parallélépipèdes inscrits dans les corps convexes// Ann. Univ. Mariae Curie-Sclodowska, Sec. A. — 1954. — *7.* — C. 97–100.
71. *Blaschke W.* Über affine Geometrie, III// Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. — 1917.— *69.* — C. 3–12.
72. *Blaschke W.* Über affine Geometrie, IX// Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. — 1917.— *69.* — C. 412–420.
73. *Blaschke W.* Affine Differenzialgeometrie. — Springer-Verlag, 1923.
74. *Bokowski J.* Konvexe Körper approximierande Polytopclassen// Elemente Math. — 1977.— *32.* — C. 88–90.
75. *Bokowski J., Schulz C.* Dichte Klassen konvexer Polytope// Math. Z. — 1978.— *160.* — C. 173–182.
76. *Bokowski J., Mani-Levinska P.* Approximation of convex bodies by polytopes with uniformly bounded valences// Monatsh. Math. — 1987.— *104.* — C. 261–264.
77. *Boratyǹski W.* Approximation of convex bodies by parallelotopes// Proc. 7th Int. Conf. on Engeneering Computer Graphics and Descriptive Geometry. — Cracow, Poland, 1996. — C. 259–260.
78. *Böröczky K. Jr.* Approximation of general smooth convex bodies// Adv. Math. — 2000.— *153.* — C. 325–341.
79. *Böröczky K. Jr.* Polytopal approximation bounding the number of $k$-faces// J. Approx. Theory. — 2000.— *102.* — C. 263–285.
80. *Böröczky K. Jr.* The error of polytopal approximation with respect to the symmetric difference metric and the $L_p$ metric// Isr. J. Math. — 2000.— *117.* — C. 1–28.
81. *Böröczky K. Jr.* About the error term for best approximation with respect to the Hausdorf related metrics// Discr. Comput. Geom. — 2001.— *25.* — C. 293–309.
82. *Böröczky K. Jr., Ludwig M.* Approximation of convex bodies and a momentum lemma for power diagram// Monatsh. Math. — 1999.— *127.* — C. 101–110.
83. *Böröczky K. Jr., Reitzner M.* Approximation of smooth convex bodies by random circumscribed polytopes// Ann. Appl. Probab. — 2004.— *14.* — C. 239–273.
84. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* Distribution of points on sphere and approximation by zonotopes// Isr. J. Math. — 1988. *64.* — C. 25–31.
85. *Bourgain J., Lindenstrauss J, Milman V. D.* Approximation of zonoids by zonotopes// Acta Math. — 1989.— *162.* — C. 73–141.
86. *Buchta C.* Über die konvexe Hölle von Zufallspunkten in Eibereichen// Elem. Math. — 1983.— *38.* — C. 153–156.
87. *Buchta C.* Stochastische Approximation konvexer Polygone// Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. — 1984.— *67.* — C. 283–304.
88. *Buchta C.* A note on the volume of a random polytope in a tetrahedron// Ill. J. Math. — 1986.— *30.* — C. 653–659.
89. *Buchta C.* A remark on random approximation of simple polytopes// Anz. Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. — 1989.— *2.* — C. 17–20.
90. *Buchta C., Reitzner M.* What is the expected volume of a tetrahedron whose vertices are chosen at random from a given tetrahedron?// Anz. Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. — 1992.— *8.* — C. 63–68.
91. *Buchta C., Reitzner M.* Equiaffine inner parallel curves of a plane convex body and the convex hulls of randomly chosen points// Probab. Theory Relat. Fields. — 1997.— *108.* — C. 385–415.
92. *Burkard R. E., Hamacher H. W., Rote G.* Sandwich approximation of univariate convex functions with its application to separable convex programming// Naval Res. Logist. — 1991. *38.* — C. 911–924.
93. *Cabo A. J., Groeneboom P.* Limit theorems for functionals of convex hulls// Probab. Theory Relat. Fields. — 1994.— *100.* — C. 31–55.
94. *Cheang G. H. L., Barron A. R.* A better approximation for balls// J. Approx. Theory. — 2000.— *104.* — C. 183–203.
95. *Chen L.* New analysis of the sphere covering problems and optimal polytope approximation of convex bodies// J. Approx. Theory. — 2005.— *133.* — C. 134–145.
96. *Clarkson K. L.* Algorithms for polytope covering and approximation// In: Proc. 3rd Workshop on Algorithms and Data Structures/ Lect. Notes Computer Sci. — 1993.— *709.* — C. 246–252.
97. *Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C.* On integer points in polyhedra// Combinatorica. — 1992.— *12.* — C. 27–37.
98. *Dalla L., Larman D. G.* Volumes of a random polytope in a convex set// In: Applied Geometry and Discrete Mathematics. Festschr. 65th Birthday Victor Klee/ DIMACS, Ser. Discret. Math. Theor. Comput. Sci. — 1991.— *4.* — C. 175–180.
99. *Devroye L.* On the oscilation of the exprcted number of extreme points of a random set// Statist. Probab. Lett. — 1991. *11.* — C. 281–286.

100. *Doyle P. C., Lagarian J. C., Randall D.* Self-parking of centrally simmetric convex bodies in $R^2$// Discr. Comput. Geom. — 1992.— *8.* — C. 171–189.
101. *Dvoretzky A.* Some results on convex bodies and Banach spaces// Proc. Int. Symp. Linear Spaces (Jerusalem, 1960). — Oxford: Pergamon, 1961. — C. 123–160.
102. *Dvoretzky A., Rogers C. A.* Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces// Proc. Nac. Acad. Sci. USA. — 1950.— *36.* — C. 192–197.
103. *Dudley R. M.* Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries// J. Approx. Theory. — 1974.— *10.* — C. 227–236.
104. *Dwyer R.* On the convex hull of random points in a polytope// J. Appl. Probab. — 1988.— *25.* — C. 688–699.
105. *Dwyer R., Kannan R.* Convex hull of randomly chosen points from a polytope// In: Parallel Algorithms and Architectures. Proc. Int. Workshop, Suhl/GDR, 1987/ Math. Res. — 1987.— *38.* — C. 16–24.
106. *Dyer M. E., Frieze A. M.* On the complexity of computing the volume of a polyhedron// SIAM J. Comput. — 1988.— *17.* — C. 967–974.
107. *Dyer M., Frieze A.* Computing the volume of convex bodies: A case where randomness provably helps// In: Probabilistic Combinatorics and Its Applications. Short Course, San Francisco/CA (USA) 1991/ Proc. Symp. Appl. Math. — 1991.— *44.* — C. 123–169.
108. *Dyer M. E., Frieze A., Kannan R.* A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies// J. Assoc. Comput. Mach. — 1991.— *38.* — C. 1–17.
109. *Dyer M. E., Fúredi Z., McDiarmid C.* Random volumes in the $n$-cube// In: Polyhedral Combinatorics. Proc. Workshop, Morristown/NJ (USA) 1989/ DIMACS, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. — 1990.— *1.* — C. 33–38.
110. *Dyer M. E., Fúredi Z., McDiarmid C.* Volumes spanned by random points in the hypercube// Random Struct. Algorithms. — 1992.— *3.* — C. 91–106.
111. *Dyer M., Gritzmann P, Hufnagel A.* On the complexity of computing mixed volumes// SIAM J. Comput. — 1998.— *27.* — C. 356–400.
112. *Eggleston H. G.* Approximation of plane convex curves, I. Dowker-tipe theorems// Proc. London Math. Soc. — 1957.— . — C. 351–377.
113. *Eggleston H. G.* Convexity. — Cambrige, 1958.
114. *Esterman T.* Über der Vektorenbereich eines konvexen Körpers// Math. Z. — 1928.— *28.* — C. 471–475.
115. *Fabińska E., Lassak M.* Large equilateral triangles inscribed in the unit disk of a Minkowski plane// Contrib. Algebra Geom. — 2004.— *45.* — C. 517–525.
116. *Faigle U., Gademann N., Kern W.* A random polynomial time algorithm for well-routing convex bodies// Discr. Appl. Math. — 1995.— *58.* — C. 117–144.
117. *Fejes Tóth L.* Approximation by polygons and polyhedra// Bull. Amer. Math. Soc. — 1948.— *54.* — C. 431–438.
118. *Fejes Tóth L.* Approximation of convex domains by polygons// Stud. Sci. Math. Hung. — 1980.— *15.* — C. 133–138.
119. *Fischer P.* Sequential and parallel algorithms for finding a maximum convex polygon// Comput. Geom. — 1997.— *7.* — C. 187–200.
120. *Finch S., Hueter I.* Random convex hulls: a variance revisited// Adv. Appl. Probab. — 2004.— *36.* — C. 981–986.
121. *Fleiner T., Kaibel V., Rote G.* Upper bounds on the maximal number of facets of 0/1-polytopes// Eur. J. Combinat. — 2000.— *21.* — C. 121–130.
122. *Florian A.* On the perimetr deviation of a convex disk from a polygon// Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. — 1992.— *24.* — C. 177–191.
123. *Florian A.* Approximation of convex discs by polygons: The perimeter deviation// Stud. Sci. Math. Hung. — 1992.— *27.* — C. 97–118.
124. *Floyd E.* Real-valued mappings of spheres// Proc. Amer. Math. Soc. — 1955.— *6.* — C. 957–959.
125. *Fruhwirth B., Burkard R. E., Rote G.* Approximation of convex curves with applications to the minimum cost flow problem// Eur. J. Oper. Res. — 1989.— *42.* — C. 326–338.
126. *Fulton C. M., Stein S. K.* Parallelograms inscribed in convex curves// Amer. Math. Monthely. — 1960.— *67.* — C. 257–258.
127. *Glasauer S., Gruber P. M.* Asimptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies, III// Forum Math. — 1997.— *9.* — C. 383–404.
128. *Glasauer S., Schneider R.* Asymptotic approximation of smooth convex bodies by polytopes// Forum Math. — 1996.— *8.* — C. 363–377.
129. *Gleason A. M.* A curvature formula// Amer. J. Math. — 1979.— *101.* — C. 86–93.

130. *Gluskin E. D.* On the sum of intervals. Geometric aspects of functional analysis// Proc. Israel Semin. (GAFA) 2001-2002/ Lect. Notes Math. — 2003.— *1807.* — С. 122–130.
131. *Gordon Y., Meyer M., Reisner S.* Volume approximation of convex bodies by polytopes. A constructive method// Stud. Math. — 1994.— *111.* — С. 81–95.
132. *Gordon Y., Meyer M., Reisner S.* Constructing a polytope to approximate a convex body// Geom. Dedic. — 1995.— *57.* — С. 217–222.
133. *Gordon Y., Reisner S., Schütt C.* Umbrellas and polytopal approximation of the Euclidean ball// J. Approx. Theory. — 1997.— *90.* — С. 9–22.
134. *Gritzmann P., Klee V., Larman D.* Largest $j$-simplices in $d$-polytopes// Discr. Comput. Geom. — 1995.— *13.* — С. 477–515.
135. *Gritzman P., Lassak M.* Estimates for the minimal wight of polytopes inscribed in convex bodies// Discr/ Comput. Geom. — 1989.— *4.* — С. 627–635.
136. *Groeneboom P.* Limit theorems for convex hulls// Probab. Theory Relat. Fields. — 1988.— *79.* — С. 327–368.
137. *Gross W.* Über affine Geometrie, XIII// Ber. Verh. Sächs. Acad. Wis. Leipzig. Math.-Nat. — 1918.— *70.* — С. 38–54.
138. *Gruber P. M.* In most cases approximation is irregular// Rend. Sem. Mat. Univers. Torino. — 1983.— *41.* — С. 19–33.
139. *Gruber P. M.* Volume approximation of convex bodies by inscribed polytopes// Math. Ann. — 1988.— *281.* — С. 229–245.
140. *Gruber P. M.* Volume approximation of convex bodies by circumscribed polytopes// In: Applied Geometry and Discrette Mathematics. DIMACS Ser. 4. — Amer. Math. Soc., 1991. — С. 309–317.
141. *Gruber P. M.* The space of convex bodies// In: Handbook of Convex Geometry. — Elsevier, 1993. — С. 301–317.
142. *Gruber P. M.* Aspects of approximation of convex bodies// In: Handbook of Convex Geometry. — Elsevier, 1993. — С. 319–345.
143. *Gruber P. M.* Asimptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies, I// Forum Math. — 1993.— *5.* — С. 281–297.
144. *Gruber P. M.* Asimptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies, II// Forum Math. — 1993.— *5.* — С. 521–537.
145. *Gruber P. M.* Approximation by convex polytopes// In: Polytopes: Abstract, Convex and Computational. Proc. NATO Adv. Study Inst., Scarborough, Ontario, Canada, Aug. 20—Sept. 3, 1993. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers/ Math. Phys. Sci. — 1994.— *440.* — С. 173–203.
146. *Gruber P. M.* Comparision of best and random approximation of convex bodies by polytopes// Rend. Circ. Math. Palermo (2). — 1997.— *50.* — С. 189–216.
147. *Gruber P. M.* A short analytic proof of Fejes Tóth's theorem on sums of moments// Aequationes Math. — 1999.— *58.* — С. 291–295.
148. *Gruber P. M.* Error of asymptotic formulae for volume approximation of convex bodies in $E^3$// Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2002.— *239.* — С. 106–117.
149. *Gruber P. M.* Error of asymptotic formulae for volume approximation of convex bodies in $E^3$// Monatsh. Math. — 2002.— *135.* — С. 271–304.
150. *Gruber P. M., Kenderov P.* Approximation of convex bodies by polytopes// Rend. Circ. Mat. Palermo (2). — 1982.— *31.* — С. 195–225.
151. *Guo Q., Kajiser S.* Approximation of convex bodies by convex bodies// Northeast Math. J. — 2003.— *19.* — С. 323–332.
152. *Hadwiger H.* Volumschätzung für die eine Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope// Elem. Math. — 1955.— *10.* — С. 122–124.
153. *Hayes A. C., Larman D. G.* The verticies of the knapsak polytope// Discr. Appl. Math. — 1983.— *6.* — С. 135–138.
154. *Hueter I.* The convex hull of a normal sample// Adv. Appl. Probab. — 1994.— *26.* — С. 855–875.
155. *Hueter I.* Limit theorems for the convex hull of random points in higher dimensions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. *351.* — С. 4337–4363.
156. *Hug D., Munsonius G. O., Reitzner M.* Asymptotic mean values of Gaussian polytopes// Beitr. Algebra Geom. — 2004. *45.* — С. 531–548.
157. *Hug D., Reitzner M.* Gaussian polytopes: variances and limit theorems// Adv. Appl. Probab. — 2005.— *37.* — С. 297—320.
158. *Johansen S.* The extremal convex functions// Math. Scand. — 1974.— *34.* — С. 61–68.

159. *Kakutani S.* A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex sets in $R^3$// Ann. Math. — 1942.— *43.* — С. 739–741.
160. *Kannan R., Lovcsz L., Simonovits M.* Random walks and an $O^*(n^5)$ volume algorithm for convex bodies// Random Struct. Algorithms. — 1997.— *11.* — С. 1–50.
161. *Kenderov P.* Approximation of plane convex compacta by polygons// Докл. Бълг. АН. — 1980.— *33.* — С. 889–891.
162. *Kenderov P.* Polygonal approximation of plane convex compacta// J. Approx. Theory. — 1983.— *38.* — С. 221–239.
163. *Küfer K.-H.* On the approximation of a ball by random polytopes// Adv. Appl. Probab. — 1994.— *26.* — С. 876–892.
164. *Klee V.* Facet-centroids and volume minimization// Stud. Sci. Math. Hungar. — 1986.— *21.* — С. 143–147.
165. *Klee V., Laskowski M. C.* Finding the smallest triangle containing a given convex polygon// J. Algorithms. — 1985.— *6.* — С. 359–366.
166. *Kochol M.* A note on approximation of a ball by polytopes// Discr. Optim. — 2004.— *1.* — С. 229–231.
167. *Kosinński A.* A proof of an Auerbach–Banach–Mazur–Ulam theorem on convex bodies// Colloq. Math. — 1957.— *4.* — С. 216–218.
168. *Kylzow D., Kuba A., Volcic A.* An algorithm for reconstructing convex bodies from their projections// Discr. Comput. Geom. — 1989.— *4.* — С. 205–237.
169. *Lángi Z.* On seven points on the boundary of a plane convex body in large relative distances// Contrib. Algebra Geom. — 2004.— *45.* — С. 275–281.
170. *Lassak M.* Approximation of convex bodies by parallelotopes// Bull. Pol. Acad. Sci., Ser. Math. — 1991. *39.* — С. 219–233.
171. *Lassak M.* On five points in a plane convex body pairwise in at least unit relative distances// Coll. Math. Soc. János Bolyai, Szegel. — 1991.— *69.* — С. 245–247.
172. *Lassak M.* Approximation of convex bodies by triangles// Proc. Amer. Math. Soc. — 1992.— *115.* — С. 207–210.
173. *Lassak M.* Approximation of convex bodies by rectangles// Geom. Dedic. — 1993.— *47.* — С. 111–117.
174. *Lassak M.* Relationship between widths of a convex body and of inscribed parallelotope// Bull. Austr. Math. Soc. — 2001.— *63.* — С. 133–140.
175. *Lassak M.* Affine-regular hexagons of extreme areas inscribed in a centrally symmetric convex body// Adv. Geom. — 2003.— *3.* — С. 45–51.
176. *Lassak M.* On relatively equilateral polygons inscribed in a convex body// Publ. Math. Debrecen. — 2004.— *65.* — С. 133–148.
177. *Levi F. W.* Über zwei Sätze von Herrn Besicovitch// Arch. Math. — 1952.— *3.* — С. 125–129.
178. *Lopez M. A., Reisner S.* Efficient approximation of convex polygons// Int. J. Comput. Geom. Appl. — 2000.— *10.* — С. 445–452.
179. *Lopez M. Reisner S.* Linear time approximation of 3D convex polytopes// Comput. Geom. — 2002.— *23.* — С. 291–301.
180. *Lovász L., Simonovits M.* Random walks in a convex body and an improved volume algorithm// Random Struct. Algorithms. — 1993.— *4.* — С. 359–412.
181. *Ludwig M.* Asymptotische Approximation Konvexer Körper/ Ph.D. Thesis. — Techn. Univ. Vienna, 1992.
182. *Ludwig M.* Asymptotic Approximation of convexe curves// Arch. Math. — 1994.— *63.* — С. 377–384.
183. *Ludwig M.* Asymptotic approximation of convex curves: the Hausdorf metric case// Arch. Math. — 1998.— *70.* — С. 331–336.
184. *Ludwig M.* A characterization of affine length and asymptotic approximation of convex discs// Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. — 1999.— *69.* — С. 75–88.
185. *Ludwig M.* Asymptotic approximation of smooth convex bodies by general polytopes// Mathematica. — 1999.— *46.* — С. 103–125.
186. *Macbeath A. M.* An extremal property of the hypersphere// Proc. Cambrige Philos. Soc. — 1951.— *47.* — С. 245–247.
187. *Macbeath A. M.* Compactness theorem for affine equivalence classes of convex regions// Can. J. Math. — 1951.— *3.* — С. 54–61.
188. *Massü B.* On the LLN for the number of vertices of a random convex hull// Adv. Appl. Probab. — 2000.— *32.* — С. 675–681.
189. *McClure D. E., Vitalie R. A.* Polygonal approximation of plane convex bodies// J. Math. Anal. Appl. — 1975.— *51.* — С. 326–358.
190. *Müller J. S.* Approximation of a ball by random polytopes// J. Approx. Theory. — 1990.— *63.* — С. 198–209.

191. *Niederreiter H.* On a measure of denseness for sequences// In: Topics in Classical Number Theory/ Colloq. Math. Soc. Janós Bolyai. — 1984.— *34.* — C. 1163–1208.
192. *Novotný P.* Approximation of convex sets by simplexes// Geom. Dedic. — 1994.— *50.* — C. 53–55.
193. *O'Rourke J.* Finding minimal enclosing boxes// Int. J. Comput. Inform Sci. — 1985.— *14.* — C. 183–199.
194. *O'Rourke J., Aggarwal A., Meddila S., Baldwin M.* An optimal algorithm for finding minimal enclosing triangle// J. Algorithms. — 1986.— *7.* — C. 258–269.
195. *Packer A.* Polynomial-time approximation of largest simplices in $V$-polytopes// Discr. Appl.Math. — 2004.— *134.* — C. 213–237.
196. *Palmon O.* The only convex body with extremal distance from the ball is the simplex// Isr. J. Math. — 1992.— *80.* — C. 337–349.
197. *Pelczynski A., Szarek S. J.* On parallelepiped of minimal volume containing a convex symmetric body in $R^n$// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1991.— *109.* — C. 125–148.
198. *Petty C. M.* On the geometry of the Minkowski plane// Riv. Mat. Univ. Parma. — 1955.— *6.* — C. 269–292.
199. *Radziszewski K.* Sur un problème extremal relatif aux figures inscrites et circonscrite aux figures convexes// Ann. Univ. Mariae Curie-Sclodowska, Sec. A. — 1952.— *6.* — C. 5–18.
200. *Reitzner M.* Inequalities for convex hulls of random points// Monatsh. Math. — 2000.— *131.* — C. 71–78.
201. *Reitzner M.* Stochastical approximation of smooth convex bodies// In: Proc. Conf. «Konvexgeometrie», Oberwolfach, Apr. 22-28, 2001. — Tagungsber. Math. Forcshungsist. Oberwolfach, 2001. — textsl18. — C. 14.
202. *Reitzner M.* Random points on the boundary of smooth convex bodies// Trans. Amer. Math. Soc. — 2002.— *354.* — C. 2243–2278.
203. *Reitzner M.* Random polytopes and the Efron–Stein jackknife inequality// Ann. Probab. — 2003.— *31.* — C. 2136—2166.
204. *Reitzner M.* The combinatorial structure of random polytopes// Adv. Math. — 2005.— *191.* — C. 178–208.
205. *Reisner S., Schütt C., Werner E.* Dropping a vertex or a facet from a convex polytope// Forum Math. — 2002.— *13.* — C. 359–378.
206. *Rényi A., Sulanke R.* Über die konvexe Hülle von $n$ zufällig gewählten Punkten// Z. Wahrscheinlichkeitsth. — 1963.— *2.* — C. 75–84.
207. *Rote G.* The convergence rate for the Sandwich algorithm for approximating convex figures in the plane// In Proc. 2nd Canad. Conf. on Comput. Geometry. — Ottava, 1990. — C. 287–290.
208. *Rote G.* The convergence rate of the Sandwich algorithm for approximating convex functions// Computing. — 1992.— *48.* — C. 337–361.
209. *Ryabchenko V. V., Lyashko S. I., Grushets'ki O. N., Rublyov B. V.* A new algorithm of linear complexity for finding triangles of maximal area inscribed in convex polygon// Visn., Kyiv. Univ. Ser. Fiz.-Mat. — 2003.— *2.* — C. 210–214.
210. *Sas E.* Ber eine Extremaleigenschalf der Ellipsen// Compos. Math. — 1939.— *6.* — C. 468–470.
211. *Shephard G. C.* Decomposable convex polyhedra// Mathematica. — 1963.— *10.* — C. 89–95.
212. *Schneider R.* Zwei Extremalaufgaben für konvexer Bereiche// Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1971.— *22.* — C. 379–383.
213. *Schneider R.* Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflachen durch Polyeder// Math. Ann. — 1981.— *256.* — C. 289–301.
214. *Schneider R.* Affinne-invariant approximation by convex polytopes// Stud. Sci. Math. Hung. — 1986.— *21.* — C. 401–408.
215. *Schneider R.* Polyhedral approximation of smooth convex bodies// J. Math. Anal. Appl. — 1987.— *128.* — C. 470–474.
216. *Schneider R.* Random approximation of convex sets// J. Microscopy. — 1988.— *151.* — C. 211–227.
217. *Schneider R., Wieacker J. A.* Approximation of convex bodies by polytopes// Bull. London Math. Soc. — 1981.— *13.* — C. 149–156.
218. *Schütt C.* The convex floating body and polyhedral approximation// Isr. J. Math. — 1991.— *73.* — C. 65–77.
219. *Schwarzkopf O., Futchs U., Rote G., Welzl E.* Approximation of convex figures by pairs of rectangulars// Comput. Geom. — 1998.— *10.* — C. 77–87.
220. *Sonnevand G.* An optimal sequential algorithm for the uniform approximation of convex functions on $[0,1]^2$// Appl. Math. Optim. — 1983.— *10.* — C. 127–142.
221. *Süss W.* Über Parallelogramme und Rechtecke, die sich ebenen Eibereichen einschreben lassen// Rend. Math. Appl. — 1955.— *14.* — C. 338–341.
222. *Tabachnikov S.* On the dual billiard problem// Adv. Math. — 1995.— *115.* — C. 221–249.
223. *Valtr P.* Probability that $n$ random points are in convex position// Discr. Comput. Geom. — 1995.— *13.* — C. 637–643.

224. *Valtr P.* The probability that $n$ random points in a triangle are in convex position// Combinatorica. — 1996.— *16.* — С. 567–573.
225. *Vershik A. M., Sporyshev P. V.* Asymptotic behavior of the number of faces of random polyhedra and the neighborliness problem// Sel. Math. Sov. — 1992.— *11.* — С. 181–201.
226. *Vershik A. M., Zeitouni O.* Large deviations in the geometry of complex lattice polygons// Isr. J. Math. — 1999. *109.* — С. 13–27.
227. *Wieaker J. A.* Eintre Probleme der polyedrishen Approximation/ Diplomarbeit. — Univ. Freiburg, 1978.
228. *Zhivkov N. V.* Plane polygonal approximation of bounded convex sets// Докл. Бълг. АН — 1982.— *35.* — С. 1631–1634.
229. *Zhou Y., Suri S.* Algoritms for minimum volume enclosing simplex in three dimensions// SIAM J. Comput. — 2002.— *31.* — С. 1339–1357.
230. *Ziegler G. M.* Lectures on 0/1 polytopes// In: Proc. DMV-Seminars «Polytopes: Combinatoric and Computation», Birkhäuser, 2000. — С. 1–44.

Е. М. Бронштейн
E-mail: `bro-efim@yandex.ru`