Современная математика. Фундаментальные направления. Том 23 (2007). С. 182–194

УДК 517.958

ПРИМЕНЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

© 2007 г. **Н. Н. ШАМАРОВ**

Аннотация. В работе кратко описываются применения расширений обычных числовых систем в областях математики, относящихся к математической физике либо тесно к ней примыкающим. Именно, описываются новые аналитические средства, связанные с этими расширениями, получившие названия «кватернионный анализ», «p-адический анализ», «нестандартный анализ» и «суперанализ». Особое внимание уделено двум примерам: «эффекту уток» в разделе о нестандартном анализе и супераналитическим «духам Фаддеева—Попова» из теории квантовых калибровочных полей.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Кватернионы. Кватернионы — элементы единственного (двумерного над комплексными полем, ассоциативного, но не коммутативного по умножению) гиперкомплексного тела, реализующегося, например, как алгебра (относительно обычных операций над матрицами матриц $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & a \end{pmatrix}$, в которых $a, b \in \mathbb{C}$. Современная роль кватернионов в математической физике (см. [1, 18], `http://quaternions.com`) исчерпывается фактически тем, что некоторые преобразования в трехмерном (в частности, эйлеровы повороты) или четырехмерном вещественном векторном пространстве либо в пространстве функций трех или четырех вещественных переменных (в частности, некоторые дифференциальные операторы) удобно выразить в терминах естественных операций над кватернионами. Наблюдается также практическое отсутствие использования кватернионов как в старых, так и в новых известных монографиях по математической физике. Важное исключение составляют упоминания кватернионов в связи с представлениями некоторых групп Ли, используемых в теориях квантовых полей и суперструн (см. [6]). Это исключение и «естественность происхождения» тела кватернионов заставляет предполагать, что в математических моделях фундаментальной физики язык кватернионов и операций над ними еще найдет свое место.

С алгебраической точки зрения кватернионный анализ, как и обсуждаемый далее в четвертой части суперанализ, стартует с некоторой комплексной алгебры (т.е. старается установить теоремы, аналогичные обычным теоремам комплексного дифференциального и интегрального исчисления, в случае, когда вместо числового поля упоминается эта алгебра), имеющей вид суммы двух векторных подпространств, одно их которых — подпространство центра (в нормальной ситуации, как правило, оно совпадает с центром), содержащее единицу и называемое «четным», а второе, «нечетное», состоит только из попарно антикоммутирующих элементов, называемых далее нечетными.

Однако алгебра кватернионов не обладает важным свойством согласования операции умножения с четностной градуировкой, выполненном в описываемых ниже супералгебрах (подпространства которых пробегают аргументы функций в функциональном суперанализе): в последних произведение двух нечетных (антикоммутирующих) элементов, как и двух четных, обязательно является четным элементом, а произведение четного с нечетным — нечетным элементом (такие алгебры называют суперкоммутативными супералгебрами). Отсюда проистекает гораздо более богатый арсенал аналитических методов (называемых суперанализом), применимых к функциям (от нескольких или бесконечного числа) четных и нечетных переменных (пробегающих соответствующие подпространства суперкоммутативной супералгебры), и одновременно (видимо, именно благодаря этому арсеналу) гораздо более сильная востребованность физической наукой, что будет продемонстрировано в четвертом пункте.

2. p-адические числа. Числа, называемые p-адическими, называются так потому, что поля, ими образуемые, параметризованы простыми (prime) числами. Именно, если p_j — j-е по порядку простое натуральное число — входит в несократимую запись ненулевого рационального числа r в степени $a_{r,j}$, то положим $|r|_{p_j} = p_j^{-a_{r,j}}$ (минус существенен) и получим гомоморфизм мультипликативной группы поля $\mathbb{Q}$ в ее положительную часть (далее пишем p вместо p_j); полагая к тому же $|0|_p = 0$, обнаружим, что выполнено неравенство треугольника $|a+b|_p \leqslant |a|_p + |b|_p$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ и, значит, отображение $\mathbb{Q} \ni r \mapsto |r|_q$ является нормированием поля рациональных чисел, называемым p-адическим. Других нормируемых недискретных топологий на поле $\mathbb{Q}$, кроме задаваемых обычным абсолютным значением и p-адическими нормированиями (перечисленные топологии, кстати, попарно различны), не существует (этот факт носит имя теоремы Островского о нормированиях на $\mathbb{Q}$). Поэтому естественно, наряду с обычным пополнением поля $\mathbb{Q}$, рассмотреть и пополнения этого поля относительно p-адических нормирований (точнее говоря, относительно равномерностей, порождаемых этими нормированиями). Соответствующие пополнения и называются полями p-адических чисел. Эти пополнения не являются упорядоченными полями, в отличие от обычного, и потому не признаются в кругу физиков за имеющие физический смысл; эта позиция, конечно, полностью оправдана при рассмотрении обычного пространства-времени, но модели теорий полей и струн, связанные с компактифицированными измерениями, столь причудливо алгебраичны — и в то же время столь же далеки от экспериментального обоснования — что приведенный аргумент о «нефизичности» применений p-адических полей теряет свою безусловность и очевидность. В математической литературе p-адический анализ — т.е. анализ функций p-адического аргумента (принимающих как комплексные, так и p-адические значения) развит вплоть до формул типа Стокса, спектральной теории дифференциальных операторов и функциональных интегралов, представляющих решения p-адических аналогов дифференциальных уравнений (в том числе стохастических) математической физики, и потому современные работы по p-адическому анализу часто относится к математической физике, хотя, в силу отсутствия верифицируемых физических предсказаний — не к теоретической физике.

Справедливости ради надо отметить, что последним свойством (отсутствием верифицируемых физических предсказаний) обладают также и многие тексты, относящиеся к теорфизическим (в частности, по теориям струн).

3. Нестандартные числа. Под нестандартными числами принято понимать элементы (линейно) упорядоченных полей, являющихся собственными расширениями (стандартного) упорядоченного поля вещественных чисел (общий метод получения таких расширений нетривиален и будет приведен после некоторых описаний его применений). Функция так называемого нестандартного анализа — в отличие от того, как, в основном, обстоит дело в случаях гиперкомплексного (в частности, кватернионного и суперанализа) или p-адического анализа — состоит не в том, чтобы устанавливать теоремы о функциях, определенных на расширениях стандартного поля, или об операторах на пространствах функций на таких расширениях, а в том, чтобы изучать обычные функции и обычные операторы в пространствах обычных функций, но с помощью продолжений этих обычных функций на множество нестандартных чисел. Для этого рассматриваются не произвольные упорядоченные расширения вещественного поля, а специальные, причем расширяется специальным образом не только числовое поле, но и любой объект — подмножество, или функция (отождествляемая с ее графиком), или оператор (отождествляемый с его графиком), и т. п. — выразимый в терминах специального подъязыка теории множеств через операции над вещественными числами и конструктивно являющийся бесконечным множеством. Специфика доказательств новых теорем об изучаемых стандартных объектах с помощью их расширений (называемых нестандартными аналогами этих объектов) состоит в двух следующих фактах. Во-первых, нестандартные аналоги изучаемых объектов связаны *теми же* формулами упомянутого подъязыка теории множеств, какими были связаны соответствующие им исходные объекты (точная формулировка этого факта, называемая «теоремой переноса», будет приведена ниже; в частности, нестандартным аналогом множества является снова множество, аналогом функции — функция, оператора — оператор и т. д). Во-вторых, эти формулы о новых объектах, как ни странно, иногда доказываются идейно проще, чем те же формулы об исходных объектах.

Итак, метод нестандартного анализа состоит в том, чтобы

а) записать нужные высказывания о стандартных объектах в подходящем языке так, чтобы они имели смысл не только для интересующих нас объектов, но и для некоторых (специально подобранных) других,
б) доказать эти высказывания об этих *других* объектах, (если, конечно, для этих других объектов доказывать проще в каком-либо смысле), и, наконец,
в) воспользоваться «теоремой переноса», гарантирующей, что высказывание, доказанное для тех (специально подобранных) других объектов, справедливо и для исходных. Конечно, в сложные рассуждения могут содержать элементы этого метода и в других порядках.

Интересно, что этот метод, активно применяемый после его изобретения в таких аналитических дисциплинах, как теория операторов, дифференциальные уравнения и стохастический анализ, изначально появился в работе по теории (натуральных) чисел. Именно, используемые в методе конструкции были применены впервые для построения нестандартной модели для аксиом Пеано, в которой наряду с обычными натуральными числами имеются и *бесконечно большие* (гипернатуральные) числа — бóльшие каждого из натуральных. Затем была построена нестандартная модель (расширение) вещественного поля, в которой наряду с гипернатуральными числами появились и им обратные — строго положительные, но меньшие каждого положительного рационального (а значит, и меньшие каждого положительного вещественного) числа, называемые, естественно, положительными бесконечно малыми (гипердействительными). Таким образом, исполнилась «мечта Лейбница» — узаконились бесконечно малые числа в анализе, бесконечно малые перемещения в механике и им подобные удобства для быстрого получения требуемых формул.

Далее опишем

а) классы тех исходных объектов (множеств) математического (в частности, функционального) анализа, которым сопоставляются нестандартные аналоги,
б) такие языки, всякое высказывание которого справедливо для исходных объектов в том и только в том случае, когда оно справедливо для соответствующих аналогов,
в) методы образования этих аналогов.

Прежде чем это сделать, укажем, по-видимому, самый яркий эпизод в истории нестандартного анализа. Именно, проблема Гильберта «существует ли нетривиальное инвариантное замкнутое подпространство у такого произвольного некомпактного ограниченного оператора A в сепарабельном гильбертовом комплексном пространстве, что A^2 компактен», впервые была решена нестандартными методами. Идея решения состояла в том, чтобы

а) вложить бесконечномерное гильбертово пространство в такое (нестандартное), алгебраическая размерность которого является гипернатуральным числом, и продолжить на это большее пространство оператор A,
б) с помощью принципа переноса утверждение о наличии инвариантного подпространства для линейного оператора в произвольном конечномерном комплексном пространстве распространить на наше гипер-конечномерное пространство, и найти в нем инвариантное подпространство для расширенного оператора, и
в) доказать (в этом месте сосредоточена вся — не слишком, впрочем, потрясающая — аналитическая сложность доказательства), пользуясь компактностью A^2, что найденное инвариантное

подпространство в пересечении с исходным гильбертовым дает нетривиальное замкнутое подпространство.

Видно, что перечисленная последовательность действий несколько отличается от сформулированного выше «метода нестандартного анализа», будучи содержащей, однако, его элементы. Ниже будут указаны и другие неожиданно эффективные применения этого метода в аналитических областях, тесно связанных с математической физикой.

Итак, переходим к построению нестандартных аналогов вещественного поля и сопутствующих ему множеств и языка с его принципом переноса. Сначала перечислим эти сопутствующие множества.

4. Суперструктура над $\mathbb{R}$. (Этот термин не имеет никакого отношения к обсуждаемому в следующем разделе суперанализу).

Определим сначала «суперструктуру» $S(M)$ для произвольного множества M. Именно, пусть

$$V_1(M) = M, \quad V_{n+1}(M) = V_n(M) \cup \{X : X \subseteq V_n(M)\},$$

и, наконец,

$$S(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n(M).$$

Отметим, что объекты, операции и пространства всей математической физики, а также объекты классического математического и классического функционального анализа, будучи стандартным образом записаны в терминах теории множеств, окажутся элементами $S(\mathbb{R})$. Поэтому нестандартному расширению будут подвергаться бесконечные множества, являющиеся элементами суперструктуры $S(\mathbb{R})$, обозначаемой далее для краткости просто S (сами вещественные числа мы по техническим причинам условимся считать не являющимися множествами, а исходными «индивидуумами» в используемой нами теории множеств).

5. Язык над $S(\mathbb{R})$. На $S(M)$ определено обычное отношение принадлежности $\in$, и в случае, когда $M = \mathbb{R}$, выделим еще несколько предикатов на нем, характеризующих свойства упорядоченного поля, и введем язык L предикатов первого порядка на S, содержащий все упомянутые предикаты на S. Для L справедлив следующий принцип нестандартного расширения: существует отображение $\iota : x \mapsto x_*$ множества S на некоторое множество S_*, при котором

а) элементы $\mathbb{R}$ остаются на месте;

б) множества переходят в множества, причем каждое конечное множество переходит в множество с тем же числом элементов, а если $A \in S$, то A является бесконечным множеством тогда и только тогда, когда A_* — бесконечное множество; при этом всякое бесконечное подмножество A вещественной прямой строго содержится в A_* и, в частности, $\mathbb{R}_* \supset \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_* \supset \mathbb{R}$;

в) $S_* \subset S(\mathbb{R}_*)$,

г) для каждого предиката P языка L на существует такой предикат P_* на S_*, что формула f языка L со свободными переменными $x, y, \ldots$ истинна для (конечного) набора элементов $X, Y, \ldots$ из S тогда и только тогда, когда формула $f_*(x, y, \ldots)$, полученная из f заменой каждого предиката P из L на P_*, истинна для набора $X_*, Y_*, \ldots$ соответствующих элементов из S_*.

Если задан некоторый бесконечный кардинал m (мощность некоторого бесконечного множества), то можно при выполнении свойств а)–г) добиться и выполнения следующего свойства:

д) «принцип насыщения мощности m»: если $\prec$ — направленное отношение на некотором бесконечном множестве A (т.е. выполнена транзитивность и $a, b \in A \Rightarrow \exists c \in A\ a, b \prec c$) мощности не более m и без максимальных элементов, то существует $x \in A_* \setminus A$, такой что для любого $a \in A\ a \prec_* x$.

В частности, новые формулы для элементов $\mathbb{R}$ выполнены тогда и только тогда, когда выполнены их исходные аналоги, и, в частности, ($a < b \iff a <_* b$) и $\forall x$ ($x \in \mathbb{N} \Rightarrow x > 0$) влечет $\forall x$ ($x \in \mathbb{N}_* \Rightarrow x > 0$) и т. д. Таким образом, $\mathbb{R}_*$ — упорядоченное поле, строго содержащее поле $\mathbb{R}$ в качестве подполя.

Отметим, что применение к $(\mathbb{N}, <)$ принципа насыщения счетной мощности влечет существование такого элемента («гипернатурального числа») $z \in \mathbb{N}_* \setminus \mathbb{N}$, что $z >_* n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Континуальный принцип насыщения, примененный к естественным образом упорядоченной системе (части графика отображения $\dim$) пар (K, k), где K — конечномерное подпространство в данном гильбертовом пространстве $H \in S$ и $k = \dim K$, приводит к существованию такого подпространства $L \subset H_*$, что $\dim_*(L) \in \ N_* \setminus \mathbb{N}$ и $H \subset_* L$ — это первый шаг к упомянутому решению проблемы Гильберта.

6. Конструкция расширения бесконечных множеств. Фильтром в непустом множестве M называется всякая такая совокупность F подмножеств этого множества, что

1. $\emptyset \notin F$, $M \in F$ и
2. если $A, B \subset M$, то

$$(A, B \in F) \Rightarrow (A \cap B \in F), \quad (A \in F, B \supset A) \Rightarrow (B \in F).$$

Из хаусдорфова принципа максимальности вытекает, что каждый фильтр в M является частью в некоторого максимального (по запасу элементов — подмножеств в M) фильтра в M. Всякий максимальный фильтр Φ в M (называемый ультрафильтром в M) обладает дополнительными свойствами:

1. если $A \subset M$, то либо ($A \in \Phi$ и $(M \setminus A) \notin \Phi$), либо ($A \notin \Phi$ и $(M \setminus A) \in \Phi$);
2. если

$$A_1, \dots, A_n \subset M \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = M,$$

   то одно из множеств A_k обязательно является элементом ультрафильтра Φ;
3. если $A \subset M$ таково, что для всякого $B \in \Phi$ пересечение $B \cap A$ непусто, то $A \in \Phi$.

Например, совокупность всех частей M, содержащих данный элемент $m \in M$, является ультрафильтром — такие ультрафильтры называются тривиальными. Нетривиальные ультрафильтры (их называют еще свободными; пересечение всех элементов свободного ультрафильтра — пустое множество) существуют в произвольном бесконечном множестве M и могут быть получены как мажорирующие для фильтров дополнений до множеств меньшей, чем M, мощности. Например, фильтр в $\mathbb{N}$, состоящий из дополнений до всевозможных конечных подмножеств (включая пустое), называемый фильтром Фреше, имеет пустое пересечение всех своих элементов и потому мажорируется только свободными ультрафильтрами. Пусть U — такой нетривиальный ультрафильтр в $\mathbb{N}$, мажорирующий фильтр Фреше.

Пусть, для каждого $n \in \mathbb{N}$, W_n — множество последовательностей элементов из $V_n(\mathbb{R})$ (ясно, что $W_1 \subset W_2 \subset \dots$), и

$$S_b = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n.$$

Множество S_b «ограниченных последовательностей» снабдим следующими отношениями: для последовательностей $a = (a_k) \in S_b$ и $b = (b_k) \in S_b$ положим

1. $a =_U b \iff \{k \in \mathbb{N} : a_k = b_k\} \in U$ (это отношение эквивалентности) и
2. $a \in_U b \iff \{k \in \mathbb{N} : a_k \in b_k\} \in U$.

Фактор-множество множества S_b по отношению эквивалентности $=_U$ обозначим символом $\mathcal{S}$, и для $a \in S_b$ класс эквивалентности объекта a обозначим символом a_U. Поскольку отношение $\in_U$ «уважает» эту эквивалентность (в том смысле, что соотношения $a' =_U a \in_U b =_U b'$ влекут $a' \in_U b'$), оно порождает некоторое отношение $\in_*$ формулой

$$a_U \in_* b_U \iff a \in_U b.$$

Замечательно, что если вложить S в $\mathcal{S}$ формулой $x \mapsto x_* = (x, x, \dots)_U$, то $x \in y \iff x_* \in_* y_*$.

Аналогично определяются и аналоги других предикатов: если $a_U, b_U \in \mathbb{R}_* \subset \mathcal{S}$, то

$$a_U <_* b_U \iff \{k : a_k < b_k\} \in U,$$

и т. п. Факт справедливости при этом пунктов а)–г) из предыдущего подраздела носит название «теорема Лося». Выполнен при наших данных и счетный принцип насыщения. Заменив множество индексов на большее (и взяв в нем свободный ультрафильтр), можно добиться выполнения принципа насыщения любой нужной мощности.

7. Успехи нестандартного подхода в аналитических дисциплинах. В этом пункте мы обратим внимание на главное достоинство нестандартного анализа — его значительную эвристическую роль. Несмотря на то, что, согласно теореме Лося, любое нестандартное доказательство может быть переработано в стандартное, существует много примеров того, как первым появляется именно нестандартное доказательство, причиной чему служит интуитивная прозрачность используемых конструкций. Важную роль в следующих аналитических примерах играет такой факт: если $a, b \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{R}_*$ таково, что $a < z < b$, то существует (конечно, единственное) $r \in \mathbb{R}$ такое, что $z - r$ бесконечно мало, т.е. $-1/n < z - r < 1/n$ для каждого натурального n. При этом число r называется стандартной частью гипервещественного числа z, $r = \mathrm{st}(z)$. В этих терминах предел последовательности $a : \mathbb{N} \ni n \mapsto a(n)$ можно вычислить (далее мы не пишем звездочку у нестандартных аналогов) как $\mathrm{st}(a(N))$, где N — произвольное бесконечно большое натуральное число. В частности,

$$f'(r) = \mathrm{st}\left(N \cdot (f(r + 1/N) - f(r))\right)$$

и

$$\int\limits_0^1 f(t)dt = \mathrm{st}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{j}{N}\right)\right),$$

и т. п. Формулы такого рода далее называются средствами или методами «нестандартного анализа».

(i) Мы уже упоминали *решение проблемы Гильберта* (см. [5]) о существовании инвариантных нетривиальных подпространств для полиномиально компактных ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. Отметим, что вскоре после этого успеха было найдено гораздо более короткое стандартное доказательство и сразу для произвольного сепарабельного банахова пространства (Ломоносовым), все же первым было доказательство средствами нестандартного анализа.

(ii) Следующий пример успешного применения нестандартного анализа — *эффект «уток»* — является, в отличие от предыдущего, методическим, поскольку его значение составляет лишь удачный способ нахождения уже известных асимптотик. Тем не менее этот пример весьма известен, и, когда автор получил предложение выступить на семинаре, запискам которого посвящен данный том, бывший руководитель семинара В. В. Трофимов, памяти которого теперь посвящен семинар, предложил рассказать именно об эффекте «уток». Название происходит от сопутствующей эффекту формы устойчивого цикла двумерной автономной системы

$$\varepsilon\dot{x} = u + x - x^3/3, \quad \dot{u} = a - x,$$

принимаемой при некоторых значениях параметров $\varepsilon > 0$ (малого) и $a < 1$ (близкого к 1).

Эту систему можно получить из уравнения Ван-дер-Поля

$$\varepsilon\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x - a = 0$$

с помощью введения величины $u = F(x) + \varepsilon\dot{x}$, где $F(x) = x^3/3 - x$.

Сам же эффект заключается в следующей специфике деформации устойчивого цикла при постоянном малом ε (при $\varepsilon = 1/100$ эффект весьма выразителен; причем чем ближе ε к нулю, тем эффект выразительнее), имеющей место при росте параметра a к 1. Для произвольного фиксированного $\varepsilon \leqslant 1/100$ при каждом значении $a > 1 - \varepsilon/4$ наш цикл охватывает (неустойчивую) стационарную точку ($x = a$, $u = F(a)$), и с ростом значения a к 1 этот цикл, начиная от размеров диаметра > 1 и практически выпуклой формы, стягивается сначала медленно (по отношению к изменению a), затем резко (проходя при этом форму «утки») к диаметру порядка ε, и затем (при $a > 1 - \varepsilon/10$) снова медленно к нулю. Суть эффекта — в наличии «резкой» фазы: при $\varepsilon = 1/100$ стягивание диаметра в 10 раз происходит на отрезке изменения a длины менее $4 \cdot 10^{-10}$ и содержащем точку 0,9987404512.

Встает задача описать в зависимости от ε то значение $a(\varepsilon)$, около которого происходит основное схлопывание, другими словами, около которого «появляется утка».

Ответ в виде

$$a(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{8} + o(\varepsilon)$$

и факт существования для произвольного N разложения в виде

$$a(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} a_j \varepsilon^j + o(\varepsilon^N)$$

гораздо нагляднее и менее громоздко доказываются при помощи рассмотрения одного бесконечно малого ε, для которого, после нескольких замен масштаба и решений простых дифференциальных уравнений, арифметическими выкладками получаются коэффициенты a_j в разложении вида

$$a(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} a_j \varepsilon^j + \varepsilon^N \eta,$$

где η бесконечно мало. Фактически роль нестандартных чисел состоит в этом примере в том, что их использование позволяет уменьшить вычислительную громоздкость с помощью вычленения интуитивно ясных геометрических соображений.

(iii) Теорема Гросса, дающая достаточное условие счетной аддитивности цилиндрической гауссовской меры в гильбертовом пространстве в терминах измеримых норм, была распространена на случай негауссовских мер нестандартными средствами, по-видимому, независимо от появившегося тремя годами раньше (см. [8]) стандартного доказательства более сильного обобщения, учитывающего знакопеременные (и, значит, векторнозначные) меры.

(iv) Важные применения нашел нестандартный анализ в стохастическом анализе. Чуть раньше стандартного появилось доказательство обобщения теоремы о существовании решения y стохастического уравнения

$$y(\omega, t) = h(\omega, t) + \int_0^t f(\omega, s, y(\omega, \cdot)) dz(\omega, t),$$

в котором $f(\omega, s, y(\omega, \cdot))$ зависит только от тех значений y, которые принимались до момента s. Обобщение состоит в снятии условия липшицевости f по третьей (пространственной) переменной.

(v) Нестандартными методами получены усиления стандартных результатов в теории стохастического оптимального управления.

(vi) Для броуновского движения Леви (случайного поля) с помощью нестандартного стохастического интеграла был получен новый *стандартный* принцип построения (аппроксимации).

(vii) Методом нестандартного анализа впервые определены как замыкаемые в $L_2(\mathbb{R}^3)$ операторы вида

$$\psi \mapsto -\Delta\psi + V \cdot \psi,$$

где Δ — оператор Лапласа, с сингулярным «потенциалом»

$$V(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \delta(x - x_j),$$

сосредоточенном на конечном множестве, и изучены их спектральные свойства.

(viii) Результаты о глобальном существовании решений уравнения Больцмана при близких к реалистическим условиях на его коэффициенты также получены методами нестандартного анализа. Также именно нестандартными методами впервые доказана сходимость таких решений к максвелловскому распределению при больших временах.

(ix) Для стохастического уравнения (системы) Навье—Стокса теорема о существовании решений была доказана впервые нестандартными методами [11].

(x) Имеет нестандартный анализ и давно ожидаемые применения к нелинейному бесконечномерному анализу, в частности, к стремительно развивающейся сейчас его области — теории условных (поверхностных) мер, порождаемых гладкой, заданной на бесконечномерном гладком многообразии, мерой на (гладком же) подмногообразии, обладающем не только бесконечной размерностью, но и бесконечной коразмерностью по отношению к исходному (объемлющему) многообразию. Прежде чем давать аккуратные определения относящихся к этой области понятий, упомянем, чем определяется критическая важность теории гладких мер для фундаментальной математической физики, а заодно подготовим почву для обсуждения в следующей части применений суперанализа в теоретической физике.

Дело в том, что в середине XX в. найдена (ставшим нобелевским лауреатом физиком Р. Фейнманом) важнейшая для квантовой теории фундаментальных полей математическая операция: функциональный фейнмановский интеграл. К тому времени интегрирование по счетно аддитивным вероятностным мерам на бесконечномерных пространствах уже было привычным для математиков, и им было известно важнейшее отличие бесконечномерной ситуации: нельзя «интегрировать функцию», поскольку подразумеваемая при этом трансляционно-инвариантная «мера объема» в бесконечномерном пространстве, если даже и определена (нетривиальное упражнение!), не обладает достаточными для привычного (с первой половины XX в.) развития теории интеграла хорошими свойствами; так что интегрировать можно только (не слишком плохие) меры, а вовсе не функции. При этом разные группы физиков, однако, в массовом порядке писали бесконечномерные интегралы от функций, делали в них замены переменных, интегрировали по частям и переходили к всевозможным пределам под знаком интеграла и в результате этого получали теоретические предсказания, согласующиеся не только с экспериментом, но и друг с другом до семи точных знаков как минимум [7]. Теперь, после работ О. Г. Смолянова и его учеников, развивающих соответствующий раздел бесконечномерного анализа — теорию гладких и обобщенных мер, — эти функции (которые физиками пишутся под знаком интеграла по очень плохо заданной мере объема) называются обобщенными плотностями подразумеваемых (с математической точки зрения) под этими функциями мер, которые, хотя и не всегда счетно аддитивны, но все же гораздо более регулярны, нежели возможные трансляционно инвариантные меры в бесконечномерных вещественных (например, банаховых) пространствах. Состояние теории бесконечномерного анализа на нелинейных гладких бесконечномерных многообразиях (даже с банаховой моделью) таково, что на сегодняшний день не существует опубликованных доказательств существования обобщенных плотностей, определенных на этих многообразиях гладких мер; таким образом, наше обсуждение вплотную приблизилось к переднему краю значительного прорыва в области фундаментальной математической физики. Нужно отметь, что этом же самом «переднем краю» находятся и исследования в области (нелинейного функционального) суперанализа, (описываемые в следующей части работы), поскольку подынтегральные функции фейнмановских интегралов в теориях суперсимметричных калибровочных квантовых полей содержат выражения с антикоммутирующими переменными. Учитывая актуальность поднятого вопроса, перейдем к достаточно подробным формулировкам.

Борелевская счетно-аддитивная (неотрицательная или векторная) мера μ называется гладкой в открытом множестве бесконечномерного банахова пространства (или гладкого многообразия с банаховой моделью), если для всякой точки этого множества найдется такая ее окрестность, что для всякой гладкой однопараметрической группы $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ из достаточно богатого набора (дающего плотное подпространство скоростей в касательном пространстве) диффеоморфизмов этой окрестности и для всякого борелевского подмножества A той же окрестности функция $t \mapsto \mu(g_t(A))$ гладкая.

Далее ограничимся случаем положительной меры и окрестностью, совпадающей с банаховым пространством B; тогда в качестве g_t достаточно брать сдвиги $x \mapsto x+th$ вдоль векторов $t\cdot h$ плотного подпространства H, называемого далее подпространством непрерывной дифференцируемости меры μ. Логарифмической производной гладкой меры μ вдоль вектора h называется такая непрерывная и интегрируемая по μ (в смысле Лебега) функция $\beta_h : B \to \mathbb{R}$, что для всякой достаточно хорошей (например, ограниченной и обладающей ограниченной производной Фреше) функции f выполнено равенство

$$\int\limits_B f'_h(x)\mu(dx) = -\int\limits_B f(x)\cdot\beta_h(x)\cdot\mu(dx), \qquad \left(f'_h(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x+th)\right).$$

Мера $\beta_h(x)\cdot\mu(dx)$ называется, соответственно, производной меры μ вдоль h. Обобщенной плотностью меры μ называется (определяемая с точностью до мультипликативной константы) положительная функция (если она существует) ρ, определенная на H и дифференцируемая вдоль векторов этого подпространства, и такая, что для любых $x, h \in H$ выполнено равенство $\rho'_h(x)/\rho(x) = \beta_h(x)$.

Отметим, что функция

$$m : H^2 \ni (x,h) \mapsto \rho(x+h)/\rho(x) \equiv e^{\int_x^{x+h} \beta}$$

(где функция $\beta : (x,h) \mapsto \beta_h(x)$ при наших условиях является линейной по h и интеграл от нее от x до $x+h$ — это обычный интеграл от дифференциальной формы по отрезку), называемая функцией Онзагера—Маклупа (или множителем квазиинвариантности) при фиксированном $h \in H$ может быть по непрерывности продолжена по первой переменной x на все пространство, причем

$$\mu(A+h) = \int\limits_A m(x,h)\mu(dx).$$

Таким образом, можно (с некоторыми оговорками) сказать, что обобщенная плотность меры — это фактически та функция, логарифмическая производная которой совпадает с логарифмической производной этой меры. Известно, что для хороших мер (например, для меры Винера) H имеет меру 0, и поэтому в привычном смысле нельзя сказать, что ρ является плотностью меры μ относительно некоторой «меры объема», но в физических текстах именно это и утверждается. Нестандартный анализ позволяет придать этому высказыванию математический смысл. Именно, поскольку для широкого класса мер (например, имеющих ограниченные гладкие плотности с ограниченной производной Фреше относительно гауссовских счетно аддитивных мер) поверхностная (=условная) мера, индуцированная данной на конечномерном подпространстве, имеет обычную плотность, пропорциональную сужению обобщенной плотности исходной меры, то, выбирая подходящие представители множеств обобщенных плотностей, мы можем, как в пункте (i), определить (бесконечномерную) обобщенную плотность как сужение гиперконечномерной плотности на содержащееся в ее гиперконечномерной области (подпространстве) определения пространство H.

Так же можно поступить и с мерой на нелинейном бесконечномерном многообразии, определяя ее обобщенную плотность как (стандартную часть) сужения «поверхностной» плотности с гиперконечномерного гладкого подмногообразия нестандартного расширения исходного многообразия. Отметим, однако, что несмотря на некоторые определения и формулировки теорем, имеющиеся в математической литературе на эту тему, на данный момент не существует опубликованных доказательств корректности предлагаемых определений обобщенных плотностей для нелинейных многообразий; в то время как функциональные интегралы по нелинейным бесконечномерным многообразиям (и, конечно, это именно интегралы от «функций») систематически используются в физической литературе (например, как интегралы по орбитам действия калибровочной группы) уже больше четверти века и, например, в рамках изложения так называемого «трюка Фаддеева—Попова» уже вошли в общеизвестные современные учебники по теории квантовых полей. Этот «трюк», однако, полностью принадлежит не просто бесконечномерному анализу, а бесконечномерному функциональному суперанализу, к которому мы и переходим.

8. Суперанализ. В отличие от трех рассмотренных выше вариантов аналитических теорий — кватернионного, p-адического и нестандартного анализа — суперанализ не нуждается в глазах физиков в дополнительных мотивациях его использования и в дополнительных аргументах о его пользе. Любой современный учебник по фундаментальным взаимодействиям упоминает о теории суперструн (и о новейшей ее версии — M-теории), в самом названии которой содержится указание на использование в ней антикоммутирующих («*нечетных*») переменных, пробегающих нечетную часть (подходящей по обстоятельствам) супералгебры; при этом, безотносительно к струнам, те же учебники приводят супераналитический трюк Фаддеева—Попова, упомянутый в конце предыдущего пункта.

При этом все больше отходит в тень тот факт, что история использования нечетных переменных начинается с Ю. Швингера (ставшего нобелевским лауреатом), который в работах по «квантовой динамике» (см. [10]) обосновывал полезность совместного рассмотрения как коммутирующих между собой, так и попарно антикоммутирующих величин (операторов) в качестве основных наблюдаемых (которые он называл динамическими переменными) — координатной и импульсной (но уже — если они нечетные — не эрмитовых; нечетные переменные в его терминологии относятся ко «второму роду», четные — к первому). Отметим еще, прежде чем продолжать историю суперанализа, что физический «уровень строгости» в упомянутых обоснованиях Ю. Швингера, апеллирующих к алгебрам операторов, позволяют допустить возможность включения в будущем в обиход математической физики в качестве «числовых» не только (суперкоммутативных) супералгебр, но и алгебр с более замысловатыми законами умножения. Пока же достойной замены (по интенсивности использования в фундаментальной теории) суперкоммутативным супералгебрам физики не нашли. Продолжим историю швингеровских «канонических переменных второго рода».

Заметим, что из слов Ф. А. Березина во втором абзаце его краткого обзора [3] истории «суперматематики», процитированных во «Введении» посмертно изданной книги [4], вытекает, что он, как ни странно, не замечал знания Швингером тождества $x^2 = 0$ и прочих свойств нечетных переменных, включая левое и правое дифференцирование по ним (хотя, как и Швингер, Березин понимал под антикоммутирующими переменными в точности образующие грассмановой алгебры, а под функциями антикоммутирующих переменных — в точности произвольные элементы грассмановой алгебры), и приписывал первое использование этого тождества (для вычисления скобок Пуассона от функций нечетных переменных) работе Мартина [14], тогда как записки лекций Швингера 1955 г. (изданные в 1970 г. в виде части книги [10, 17]) содержат и обсуждаемое тождество, и корректное обращение с типами частных производных по образующим грассмановой алгебры.

В те годы (середина XX в.) аналитические обоснования находились в абсолютном пренебрежении физиками, довольствовавшимися в своих «строгих выводах» геометрической интуицией и алгебраическими вычислениями, и с этим хорошо согласуется то, что уже отмечалось, но к чему стоит привлечь дополнительное внимание: под «антикоммутирующими переменными» (или «переменными второго рода», по Швингеру) понимались (и часто понимаются до сих пор) вовсе *не переменные*, а *фиксированные* (образующие) элементы (как правило, конечномерной) грассмановой алгебры, а под «функциями антикоммутирующих переменных» — вовсе не функции, определенные на некоторых областях определения, а опять-таки элементы (но уже не обязательно образующие) той же грассмановой алгебры, благо ее произвольный элемент представляется в виде значения некоторого многочлена (с обычными — вещественными или комплексными — коэффициентами) от образующих.

При этом под «суперматематикой» часто понимается именно этот алгебраический подход (см. [13]), причем работающие в его рамках алгебраисты практически «не замечают» разрабатывающийся начиная с 1980 г. «функциональный подход» (см. [15]) к суперанализу, в котором нечетные переменные честно пробегают пространства, функции же от них определены на этих пространствах как обычные отображения и, как обычно, задаются своими графиками, а главное — в рамках этого функционального подхода корректно определяются всевозможные («определенные», или, точнее, векторные криволинейные) интегралы на «функциональных супермногообразиях», являющихся опять-таки обычными гладкими многообразиями с (как правило) банаховой моделью, тогда как классические примеры (см. [9, с.54–55]) показывают, что при алгебраическом подходе криволинейный интеграл (по отрезку!) смысла не имеет (корректно определен только интеграл по всему пространству).

Отметим, что, начиная с работы Мартина [14] своеобразие алгебраического подхода, в котором смешиваются понятия точки суперпространства, нечетной переменной и функции от нечетных переменных (когда два последних — частные случаи первого), стимулировало интерес исследователей (считающих это своеобразие скорее достоинством, нежели недостатком) и привела к довольно красивым математическим построениям и теоремам (алгебро-геометрического характера), правда, никакого признания со стороны физической общественности до сих пор не получившим.

Построение и использование фермионного фоковского пространства (алгебры антисимметричных тензоров на гильбертовом пространстве, являющейся бесконечномерным аналогом грассмановой алгебры) в рамках квантовой электродинамики, и сходство многих алгебраических свойств этого пространства и анализа функций на нем с аналогичными свойствами, связанными с бозонным фоковским пространством (алгебры симметричных тензоров на гильбертовом пространстве) также стимулировали поиск супераналитических конструкций, приведших к супераналитической версии изоморфизмов Баргмана и Сигала (см. [2, 12]).

Наконец, опишем мотивировку и конечномерную версию знаменитого «трюка» с введением «ду́хов» Фаддеева—Попова, приводимого в учебниках по квантовой теории калибровочных полей, отвечающих фундаментальным взаимодействиям. Наблюдаемые параметры квантовых полей с середины XX в. физики эффективно вычисляют, пользуясь «производящим функционалом функций Грина» — интегралом Фейнмана по бесконечномерному (функциональному) векторному пространству X всех «траекторий», или конфигураций поля A

$$Z(J)/Z(0) = \int\limits_X e^{i(S(A)+J(A))}, \qquad e^{i(S(A))} D(A) / \int\limits_X \mathcal{D}(A),$$

где $\mathcal{D}(A)$ — рассмотренный ранее «элемент объема» в пространстве X, $S(A)$ — значение функционала действия на данной конфигурации, J — линейный функционал на пространстве X. Деление призвано символизировать нечто вроде регуляризации интеграла в числителе, в сходимости которого физики законно сомневаются.

Отметим, что если выражение $e^{i(S(A))}\mathcal{D}(A)$ интерпретировать как $\mu(dA)$ — как писалось в конце предыдущего пункта, это значит, что $e^{i(S(A))}$ является обобщенной плотностью меры μ — то $Z(J)$ является просто преобразованием Фурье этой меры μ. n-Частичная функция Грина ($n = 1, 2, \dots$) есть не что иное, как (комплекснозначное) интегральное ядро n-линейного функционала $Z^{(n)}(0)/Z(0)$, являющегося n-й производной в нуле отображения $Z : X' \mapsto \mathbb{C}$. Если бы мера μ была вероятностная, n-частичные функции Грина определяли бы корреляционные моменты распределения μ.

Для простоты выкладок далее фиксируем $J = 0$ и полагаем $T = S$, $Z = Z(0)$. Однако тот факт, что поле калибровочное, означает, что

1. не элементы A пространства X имеют смысл физически различимых конфигураций полей, а лишь орбиты $G(A) = A^G$ некоторой действующей на нем группы (называемой калибровочной) G, и
2. функционал действия S и «источник» J инвариантны относительно действия

   $$G \times X \ni (g, A) \mapsto g(A) = A^g \in X$$

   группы G, т.е. постоянны на орбитах: $T(A^g) = T(A)$ для каждого $g \in G$; и поэтому, чтобы фактически интегрировать по пространству физических конфигураций X/G, но при этом оставаться в привычном функциональном пространстве, надо записать интеграл

   $$\int e^{T(A)}\ \mathcal{D}A$$

   не по всему X, а по некоторому подмногообразию M в X, которое пересекается с каждой орбитой по одной точке (точки орбиты считаются равнозначными, орбита считается копией группы, и на группе подразумевается трансляционно инвариантная мера):

   $$Z = \int\limits_M e^{iT(A)}\ \mathcal{D}A.$$

Предполагается, что это подмногообразие выделяется уравнением $f(A) = 0$, с помощью сюръективной функции $f : X \to Y$, где вспомогательное пространство Y, например, совпадает с касательной алгеброй группы G или с самой G, а также изоморфно каждой орбите A^g, если она линейная. В последнем случае на основании сказанного пишут нечто вроде

$$Z = \int\limits_M e^{iT(A)}\ \mathcal{D}(A) = \int\limits_X e^{iT(A)}\ \delta(f(A))\ \mathcal{D}A = \int\limits_M \mathcal{D}(A)\ \left(e^{iT(A)} \int\limits_{A^G} \mathcal{D}_A B\ \delta(f(B)) \right) = \dots.$$

Прежде чем продолжать выкладку, поясним, что

1. множитель $\delta(f(A))$ перед $\mathcal{D}A$ призван символизировать нечто вроде поверхностной меры, и
2. мера $\mathcal{D}_A(B)$ в каждой орбите A^G считается перенесенной с группы G, где имеется «бесконечная мера Хаара» $\mathcal{D}g$, с помощью замены $g \mapsto B = A^g$; поэтому

$$Z = \dots = \int\limits_M \mathcal{D}A \left(e^{iT(A)} \cdot \int\limits_G \mathcal{D}g\ \delta(f(A^g)) \det \frac{\partial A^g}{\partial g} \right) = \left(\int\limits_G \mathcal{D}g \right) \int\limits_X \mathcal{D}A\ \delta(f(A^g))\ e^{iT(A)} \det \frac{\partial A^g}{\partial g},$$

где в последнем переходе учтена независимость подынтегральных выражений от g для случая электромагнитного поля, которым мы и ограничимся; области интегрирования физики вообще не пишут, но мы объясним переход от $\int\limits_M$ к $\int\limits_X$ наличием под интегралом дельта-функции. В разных физических текстах на эту тему пишутся разные цепочки равенств, в которых неизменно одно — наличие последнего определителя, происходящего от замены переменной. Благодаря этому ему и проникает в эту, до сих пор комплексную, область вычислений суперанализ.

Именно, физики считают достаточно терпимым наличие дельта-функции в качестве множителя наряду с экспонентой, но вот последний определитель, по их мнению, сильно портит «гамильтонов» вид интеграла. Для борьбы с этим явлением и был изобретен метод введения «духов», состоящий в том, что определитель оператора («матрицы Якоби») $D_A = \partial A^g/\partial g$ заменяется гауссовским интегралом по вспомогательному пространству N, пробегаемому нечетными переменными:

$$\det D_A = \int\limits_N e^{\frac{1}{2}B_A(\xi,\xi)}\mathcal{D}\xi,$$

где ξ — элемент (вообще говоря, бесконечномерного над нечетной частью подразумеваемой супералгебры) пространства N, и B_A — билинейная форма, определяемая оператором D_A аналогичным описываемому чуть ниже способом. Прежде чем приводить это описание, отметим, что зависимость определителя D_A от A считается нормальным делом; главное, что после такого преобразования определителя получается более удовлетворительный для физиков вид:

$$Z = \left(\int\limits_G \mathcal{D}g\right) \cdot \int\limits_X \int\limits_N \mathcal{D}A\ \mathcal{D}\xi\ \delta(f(A))\ e^{iS(A)+\frac{1}{2}B_A(\xi,\xi)}.$$

При этом квадратичное по ξ дополнительное к действию слагаемое в показателе мнимой экспоненты с физической точки зрения интерпретируется так, что исходная калибровочная квантовополевая система с действием S эффективно проявляет себя как система с вспомогательными полями (описываемыми нечетными переменными), которые и названы ду́хами (Фаддеева—Попова).

Приведем теперь конечномерные соображения, оправдывающие упомянутое интегральное представление определителя. Для начала определим (алгебраически) интегрирование по пространству нескольких нечетных переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots$ как линейный (над $\mathbb{C} \ni c_1, c_2, \ldots$) функционал на пространстве многочленов от этих переменных (отметим, что для того, чтобы многочлен как отображение однозначно определял свои коэффициенты, надо потребовать, чтобы аннулятор нечетной части супералгебры обращался в нуль, а для этого необходимо, чтобы размерность этой четной части супералгебры была бесконечной):

$$\int d\xi_j = 0, \qquad \int \xi_j d\xi_j = 1,$$

$$\int f(\xi_{j+1},\ldots,\xi_{j+k})g(\xi_1,\ldots,\xi_j)\,d\xi_1\cdots d\xi_j\,d\xi_{j+1}\cdots d\xi_{j+k} = \\ = \int \left(f(\xi_{j+1},\ldots,\xi_{j+k})\cdot\left(\int g(x_1,\ldots,\xi_j)\,d\xi_1\cdots d\xi_j\right)\right) d\xi_{j+1}\cdots d\xi_{j+k}.$$

Отсюда

$$\int e^{c_1\xi_1\xi_2}\,d\xi_1\,d\xi_2 = \int 1\,d\xi_1\,d\xi_2 + c_1\int \xi_1\xi_2\,d\xi_1\,d\xi_2 + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{(c_1)^j}{j!}\int(\xi_1\xi_2)^j\,d\xi_1\,d\xi_2 = 0 + c + 0 = c$$

(в последнем равенстве учтено, что

$$x_1x_2x_1\cdots = -x_1x_1x_2\ldots = 0,$$

так как $x_j x_k = -x_k x_j$ и $x_j^2 = 0$). Далее, поскольку $\xi_j \xi_k$ коммутирует с любым многочленом от нечетных переменных,

$$\int e^{c_1\xi_1\xi_2 + c_2\xi_3\xi_4}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4 = \int e^{c_2\xi_3\xi_4} \left(\int e^{c_1\xi_1\xi_2}\, d\xi_1\, d\xi_2 \right) d\xi_3\, d\xi_4 = c_1 c_2,$$

и, аналогично,

$$\int e^{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \xi_{2j-1}\xi_{2j}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_{2n-1}\, d\xi_{2n} = c_1 c_2 \cdots c_n = \det \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n).$$

Таким образом, для диагонализуемых конечномерных операторов интегральное представление определителя доказано. Аналогично, но сложнее, доказывается представимость определителя произвольной комплексной матрицы D размера $n \times n$ с помощью антисимметричной интеграла экспоненты билинейной формы от $2n$ нечетных переменных, в матрицу которой входит в качестве блоков матрица исходного оператора. Например, для приведенного выше диагонального оператора $D = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ матрица формы B представима четырьмя блоками:

$$B_{1,1} = B_{2,2} = 0 \quad \text{и} \quad B_{1,2} = -B_{2,1} = D.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. — Едиториал УРСС, 2003.
2. *Березин Ф. А.* Канонические преобразования операторов в представлении вторичного квантования// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 2. — С. 311–314.
3. *Березин Ф. А.* Математические основы суперсимметричных теорий поля// Ядерная физика. — 1979. — *29*, № 6. — С. 1670–1687.
4. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
5. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980.
6. *Каку М.* Введение в теорию суперструн. — М.: Мир, 1999. — 624 с.
7. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. — Москва–Ижевск: РХД, 2001.
8. *Смолянов О. Г.* Теорема Гросса—Сазонова для знакопеременных цилиндрических мер// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1983. — *4*. — С. 4–12.
9. *Хренников А. Ю.* Суперанализ. — М.: Наука-Физматлит, 1997.
10. *Швингер Ю.* Квантовая кинематика и динамика. — - М.: Наука, 1992.
11. *Cutland N. J.* Loeb Measures in Practice: Recent Advances// Lect. Notes Math. — 2000. — *1751*.
12. *Kupsch J. and Smolyanov O. G.* Functional representations for Fock superalgebras// Infinite Dim. Analysis., Quantum Probability. and Rel. Topics. — 1998. — № 1(2). — C. 285–324; e-print `hep-th/9708069`.
13. *Manin Ju.* Topics in noncommutative geometry. — Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1991.
14. *Martin J. L.* Generalized classical dynamics, and the «classical analogue» of a Fermi oscillator// Proc. Roy. Soc. — 1959. — *A251*. — C. 536–542.
15. *Rogers A.* Super Lie groups: global topology and local sructure// J. Math. Phys. — 1980. — *21*. — C. 724–731.
16. *Rogers A.* A global theory of supermanifolds// J. Math. Phys. — 1981. — *22*. — C. 939–9459.
17. *Schwinger J.* A note to the quantum dynamical principle// Phil. Mag. — 1953. — *44*. — C. 1171–1193.
18. *Sweetser D.* Doing Physics with Quaternions.