Современная математика. Фундаментальные направления. Том 22 (2007). С. 139–167

УДК 514.772.35

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЛАСТЕЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2007 г. **А. П. КОПЫЛОВ**

Аннотация. Статья посвящена двум новым направлениям в развитии классической геометрической тематики, связанной с исследованиями проблемы однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей их внутренними метриками. Первое из направлений состоит в изучении проблемы однозначной определенности областей (т.е. открытых связных множеств) в евклидовых пространствах относительными метриками границ этих областей. Оно возникло около 25–30 лет тому назад и получило свое развитие благодаря усилиям российских ученых. В первой части статьи (в разделах 3–7) сделан обзор результатов, относящихся к этому направлению.

Основы второго направления мы излагаем впервые во второй части статьи, т.е. в разделе 8. Это направление тесно примыкает к первому и заключается в исследовании проблемы однозначной определенности конформного типа. Основной результат раздела представляет собой теорема об однозначной определенности ограниченных выпуклых многогранных областей относительными конформными модулями их граничных конденсаторов.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Согласно классической теореме (см., например, [12]) *две ограниченные замкнутые выпуклые поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, изометричные в своих внутренних метриках, равны, т.е. могут быть совмещены движением*. Отметим, что проблема однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей их внутренними метриками восходит к следующему результату Коши, полученному им еще в 1813 г. и заключающемуся в том, что *любые замкнутые выпуклые многогранники P_1 и P_2 (в трехмерном евклидовом пространстве), одинаково составленные из конгруэнтных граней, равны*. Эта проблема привлекала к себе внимание многих математиков на протяжении почти 140 лет (в этой связи см., например, исторический обзор в [12, гл. 3]) и получила свое полное решение в работе [13] А. В. Погорелова в виде приведенной в начале абзаца теоремы (по поводу обобщения последней теоремы на случай замкнутых выпуклых гиперповерхностей в евклидовом пространстве произвольной размерности $n \geq 4$ см. [17]).

В [10] был предложен новый подход к проблеме однозначной определенности поверхностей, позволивший существенно расширить рамки этой проблемы. Суть этого подхода можно достаточно выпукло проиллюстрировать на следующей модельной ситуации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00482) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект № 311.2003.1).

©2007 РУДН

Пусть U_1 и U_2 — области (т.е. открытые связные множества) в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, замыкания которых $\operatorname{cl} U_j$, $j = 1, 2,$ — липшицевы многообразия (такие, что $\operatorname{fr}(\operatorname{cl} U_j) = \operatorname{fr} U_j \neq \varnothing$). Последнее означает, что у каждой точки $x \in \operatorname{cl} U_j$, $j = 1, 2$, существует окрестность $V_{j,x}$ и билипшицево отображение $h_{j,x} : V_{j,x} \to B(0, 1)$ этой окрестности на единичный шар

$$B(0,1) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| = \left(\sum_{s=1}^{n} (x_s)^2 \right)^{1/2} < 1 \right\}$$

со свойством $h_{j,x}(U_j \cap V_{j,x}) = B(0, 1)$ либо $h_{j,x}(U_j \cap V_{j,x}) = \{x \in B(0, 1) \mid x_1 \leq 0\}$ (напомним, что отображение $h : X \to Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется билипшицевым, если существует число C, $0 < C < \infty$, удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{C}\rho_X(x_1, x_2) \leq \rho_Y(h(x_1), h(x_2)) \leq C\rho_X(x_1, x_2)$$

для любых двух точек x_1 и x_2 из X). Предположим далее, что границы $\operatorname{fr} U_1$ и $\operatorname{fr} U_2$ этих областей, которые совпадают с краями многообразий $\operatorname{cl} U_1$ и $\operatorname{cl} U_2$, изометричны в их относительных метриках $\rho_{\operatorname{fr} U_j, U_j}$ $j = 1, 2$, т.е. в метриках, которые являются сужениями на границы $\operatorname{fr} U_j$ продолжений (по непрерывности) в $\operatorname{cl} U_j$ внутренних метрик областей U_j. Возникает следующий естественный вопрос. *При каких дополнительных условиях области U_1 и U_2 сами изометричны*? Естественность этой задачи определяется, в частности, тем обстоятельством, что отмеченная в начале статьи проблема однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей представляет собой важнейший ее частный случай. Действительно, предположим, что S_1 и S_2 — две замкнутые выпуклые поверхности в $\mathbb{R}^3$, т.е. границы двух ограниченных выпуклых областей $G_1 \subset \mathbb{R}^3$ и $G_2 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $U_j = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{cl} G_j$ — дополнение замыкания $\operatorname{cl} G_j$ области G_j, $j = 1, 2$. Тогда внутренние метрики поверхностей $S_1 = \operatorname{fr} U_1$ и $S_2 = \operatorname{fr} U_2$ совпадают с относительными метриками $\rho_{\operatorname{fr} U_1, U_1}$ и $\rho_{\operatorname{fr} U_2, U_2}$ границ областей U_1 и U_2, и тем самым задача об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей их внутренними метриками — частный случай задачи об однозначной определенности областей относительными метриками их границ.

Упомянутое выше расширение рамок проблемы однозначной определенности поверхностей, проистекающее из предложенного в [10] подхода к этой проблеме, проявляется, в частности, в том, что однозначная определенность областей относительными метриками их границ имеет место не только в том случае, когда их дополнения — ограниченные выпуклые множества, но, например, и в следующих случаях: область U_1 ограниченная и выпуклая, область U_2 любая (А. П. Копылов; см. ниже теоремы 3.1 и 6.1); область U_1 строго выпуклая, область U_2 любая (А. Д. Александров; см. теорему 4.1); области U_1 и U_2 ограничены и обладают кусочно гладкими границами (В. А. Александров; см. теорему 3.3); области U_1 и U_2 обладают непустыми ограниченными дополнениями, а их границы представляют собой связные многообразия класса C^1 размерности $n-1$ без края (В. А. Александров; см. теорему 4.2) и т. п.

Данную статью можно разделить на две части.

Первая из них (см. разделы 3–7) посвящена в основном обзору результатов, относящихся к проблеме однозначной определенности областей относительными метриками их границ и полученных разными авторами в период с 1984 г. по настоящее время.

Вторая и очень важная часть представлена последним разделом. В этом разделе закладываются основы еще одного направления исследований однозначной определенности областей в евклидовых пространствах (тесно связанного с направлением, которое рассматривается в первой части), т.е. направления исследований проблемы однозначной определенности, так сказать, конформного типа. Основной результат раздела Э— теорема 8.1 об однозначной определенности ограниченных выпуклых многогранных областей относительными конформными модулями их граничных конденсаторов.

2. Обозначения, терминология и вспомогательные утверждения

Как во введении, так и на протяжении всей статьи мы пользуемся следующими символами и понятиями: $\mathbb{N}$ — это множество всех целых положительных чисел; $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ — n-мерное арифметическое вещественное евклидово пространство всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

из n вещественных чисел; $|x| = \left\{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right\}^{1/2}$ — длина вектора $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j \in \mathbb{R}^n$ (здесь и ниже $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, т.е. e_j — элемент пространства $\mathbb{R}^n$ такой, что j-я его координата равна 1, а остальные координаты равны 0); область в пространстве $\mathbb{R}^n$ — его открытое связное подмножество; $\operatorname{cl} E$ и $\operatorname{fr} E$ — замыкание и соответственно граница в $\mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$; область в $\mathbb{R}^n$, замыкание которой — липшицево многообразие; внутренняя метрика поверхности; относительная метрика $\rho_{\operatorname{fr} U, U}$ границы области U, допускающей продолжение по непрерывности ее внутренней метрики ρ_U в замыкание $\operatorname{cl} U$; понятие однозначной определенности областей в $\mathbb{R}^n$ относительными метриками их (евклидовых) границ.

Кроме того, ниже мы пользуемся еще такими обозначениями, понятиями и предварительными сведениями. $\operatorname{Im} h = h(X)$ — образ отображения $h : X \to Y$, $\operatorname{Id} E$ — тождественное отображение множества E и $f|_E$ — сужение отображения f на E.

$B_n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$ — открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ (n-мерный шар) с центром $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом r $(0 < r < \infty)$; $S_{n-1}(x, r)$ — его граничная сфера, в частности, $B_n = B_n(0, 1)$ и $S_{n-1} = S_{n-1}(0, 1)$ — единичные шар и соответственно сфера в $\mathbb{R}^n$; v_n — объем шара B_n ($v_n = n s_{n-1}$, где s_{n-1} — площадь сферы S_{n-1}):

$$v_{2k+1} = \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k+1)!}, \quad v_{2(k+1)} = \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$\mathbb{R}^n_\pm$ — полупространства $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 0\}$; $B_n^+ = B_n^+(x_0, r)$, где $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$, есть полушар $B_n(x_0, r) \cap \mathbb{R}^n_+$. При этом указание на размерности n и $n-1$ в тех случаях, когда не может возникнуть недоразумений, мы опускаем.

$\bar{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^n$. Напомним, что $\bar{\mathbb{R}}^n$ — метризуемое топологическое пространство, гомеоморфное сфере S_n (в этой связи см., например, [23]).

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ — множество всех вещественных чисел (вещественная прямая).

$\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ — двухточечная компактификация вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, то символ $\operatorname{int} E$ обозначает (евклидову) внутренность, $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x,y \in E} |x - y|$ — диаметр и $\operatorname{mes} E = \operatorname{mes}_n E$ — (n-мерную) меру Лебега множества E.

Многообразие класса C^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, (вещественно) аналитическое многообразие и липшицево многообразие означают у нас подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ соответствующего класса (по поводу понятия липшицева многообразия размерности n см. Введение; липшицево многообразие произвольной размерности определяется аналогично). Край многообразия M мы обозначаем символом ∂M, множество его внутренних точек (внутренность) — символом $\operatorname{int} M$, т.е. так же, как и внутренность множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}, \quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$

— отрезок, интервал и полуинтервал в $\mathbb{R}$ с концами a и b.

Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, где $a, b \in \mathbb{R}$, называется (*непрерывным*) *путем в* $\mathbb{R}^n$. Длина $l(\gamma)$ и спрямляемость пути γ в $\mathbb{R}^n$ понимаются в классическом смысле (см., например, [16, с. 185–190]):

$$l(\gamma) = \sup_{a = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_\nu = b} \sum_{j=1}^{\nu} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

и соответственно

$$l(\gamma) < \infty.$$

Пусть A — борелевское подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и $\rho : A \to \dot{\mathbb{R}}$ — неотрицательная измеримая по Борелю функция. Если $\gamma : [a, b] \to A$ — непрерывный спрямляемый путь, то *криволинейным интегралом функции ρ вдоль пути γ* называется следующая величина (см. [23]):

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds = \int\limits_{0}^{l(\gamma)} \rho(\gamma^\circ(t))\, dt.$$

Здесь $\gamma^\circ : [0, l(\gamma)] \to A$ — *нормальное представление пути* γ, т.е. такой путь, что $\gamma = \gamma^\circ \circ s_\gamma$, где $s_\gamma(t) = l(\gamma|_{[a,t]})$, $t \in [a,b]$, — *функция длины пути* γ, причем интеграл в правой части равенства существует, так как композиция $\rho \circ \gamma^\circ$ является неотрицательной измеримой по Борелю функцией. Значение этого интеграла может быть равно и $+\infty$.

Если Γ — семейство путей в $\mathbb{R}^n$, то его *n-модуль* $M_n(\Gamma)$ определяется следующим образом. Пусть $\mathcal{R}(\Gamma)$ представляет собой множество всех *допустимых функций для семейства* Γ, т.е. неотрицательных измеримых по Борелю функций $\rho : \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$, таких, что

$$\int\limits_\gamma \rho ds \geq 1$$

для каждого спрямляемого пути $\gamma \in \Gamma$. Тогда

$$M_n(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n dx.$$

Это определение естественным способом может быть распрстранено и на тот случай, когда среди входящих в состав Γ путей содержатся, например, пути, области определения которых — интервалы $]a,b[$ (подробности см. в [23]), но для наших целей достаточно рассматривать только лишь семейства путей с областями определения, представляющими собой отрезки. Важнейшим свойством n-модуля семейства путей в $\mathbb{R}^n$ является его конформная инвариантность [23].

Пусть Γ_1 и Γ_2 — семейства путей в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что *семейство* Γ_1 *минорирует семейство* Γ_2 (либо *семейство* Γ_2 *минорируется семейством* Γ_1), если для каждого пути $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ из семейства Γ_2 можно указать отрезок $[a_1, b_1]$, $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, такой, что путь $\gamma|_{[a_1,b_1]}$ принадлежит семейству Γ_1.

Пусть E_1 и E_2 — непересекающиеся множества и U — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, такие, что $\{E_1 \cup E_2\} \cap U = \varnothing$. Мы скажем, что (непрерывный) путь $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ соединяет множества E_1 и E_2 в U, если $\gamma(a) \in E_1$, $\gamma(b) \in E_2$ и $\gamma(t) \in U$ при $t \in]a,b[$. Символом $\Gamma_{E_1,E_2,U}$ мы обозначаем множество всех путей γ, соединяющих E_1 и E_2 в U (это множество может быть и пустым).

Внутренняя метрика ρ_U области U в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\rho_U(x_1, x_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{\{x_1\},\{x_2\},U \setminus \{x_1,x_2\}}} l(\gamma),$$

где инфимум вычисляется по множеству $\Gamma_{\{x_1\},\{x_2\},U \setminus \{x_1,x_2\}}$ всех путей γ, соединяющих x_1 и x_2 в $U \setminus \{x_1, x_2\}$.

Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ представляет собой ограниченное пересечение конечного числа замкнутых полупространств, выпуклая многогранная область — непустое ограниченное пересечение конечного множества открытых n-мерных полупространств. Ясно, что замыкание последней является выпуклым многогранником. Гранью размерности $n-1$ границы $\operatorname{fr} U$ выпуклой многогранной области U называется пересечение $s = \tau \cap \operatorname{fr} U$ гиперплоскости τ и границы $\operatorname{fr} U$, представляющее собой $(n-1)$-мерное липшицево многообразие. Грань s размерности k границы $\operatorname{fr} U$ этой области, $k = 1, 2, \ldots, n-2$, определяется по индукции: грань s есть k-мерная грань края ∂s^* грани s^* размерности $k+1$. Наконец, нульмерная грань (или вершина многогранника $\operatorname{cl} U$) — это конец отрезка, являющегося 1-мерной гранью. Несущая плоскость $\tau(s)$ грани s границы $\operatorname{fr} U$ выпуклой многогранной области есть аффинная оболочка s.

Преобразованием Мёбиуса называется всякое отображение $f : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$, представляющее собой композицию конечного числа преобразований подобия и инверсий относительно сфер (см., например, [15]). Отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *конформным*, если для каждой точки $x \in U$ производная (дифференциал) $f'(x)$ представляет собой невырожденное общее ортогональное преобразование (т.е. $|f'(x)h| = \lambda(x)|h|$, если $h \in \mathbb{R}^n$, причем $\lambda(x) > 0$ и не зависит от h). Всякое мёбиусово преобразование конформно. А в силу классической теоремы Лиувилля, если отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ области $U \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$, принадлежит классу C^3 и является конформным, то тогда существует мёбиусово преобразование $F : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ такое, что $f = F|_U$. Ю. Г. Решетняк условие гладкости в теореме Лиувилля существенно ослабил, установив, что всякое обобщенно конформное отображение есть преобразование Мёбиуса (см. [15]).

Ряд понятий введены в следующих ниже разделах. Перечислим некоторые из них.

Понятие однозначной определенности области U относительной метрикой ее границы $\operatorname{fr} U$. Область с кусочно-гладкой границей. Классы областей $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(n)$ и $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(n)$ (раздел 3).

Классы областей $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n)$, $\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \widetilde{\mathcal{A}}_1(n)$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}(n)$. Множество $\Delta(U)$ (раздел 4).

Определение K-квазиизометрического отображения областей в $\mathbb{R}^n$ и K-квазиизометрического отображения границ в их относительных метриках. Величина $d(U_1, U_2)$. Хаусдорфово расстояние между множествами (раздел 5).

Хаусдорфова граница $\operatorname{fr}_H U$ области U. Относительная метрика $\rho_{\operatorname{fr}_H U, U}$ хаусдорфовой границы области U. Изометричность хаусдорфовых границ областей в их относительных метриках. Понятие однозначной определенности области U в заданном классе $\mathcal{U}$ областей относительной метрикой ее хаусдорфовой границы. Носитель элемента хаусдорфовой границы области и его достижимость из области U по спрямляемому пути. Спрямляемый путь, представляющий элемент хаусдорфовой границы. Кратчайший путь, соединяющий в замыкании $\operatorname{cl} U$ области U элементы a и b ее хаусдорфовой границы. Спрямляемый путь, соединяющий элементы хаусдорфовой границы $\operatorname{fr} U$ по области U. Континуум. Область с полиэдральной границей (раздел 6).

Локальная изометричность в относительных метриках хаусдорфовых границ. Понятие однозначной определенности области U условием локальной изометричности в относительных метриках хаусдорфовых границ областей. Граница (евклидова) области, являющаяся симплициальным комплексом. Малый и большой остовы хаусдорфовой границы области с полиэдральной границей (раздел 7).

Граничный конденсатор области с липшицевой границей. Образ граничного конденсатора при отображении $f : \operatorname{fr} V \to \operatorname{fr} U$. Относительный конформный модуль $M^U(F)$ граничного конденсатора F области U. Понятие однозначной определенности области U относительными конформными модулями ее граничных конденсаторов. Величины $L(x_0, f, r)$ и $l(x_0, f, r)$. $J(x, f)$ — якобиан отбражения f в точке x. Невырожденная дифференцируемость отображения в точке. Граница $\operatorname{fr}_s \sigma$ ($\operatorname{fr}_{\operatorname{fr} U} G$) множества $\sigma \subset s$ ($G \subset \operatorname{fr} U$) относительно $(n-1)$-мерной грани s границы $\operatorname{fr} U$ выпуклой многогранной области U (относительно $\operatorname{fr} U$) (раздел 8).

3. Теоремы об однозначной определенности ограниченных областей

Первым утверждением, относящимся к проблеме однозначной определенности областей относительными метриками их границ, явилась следующая теорема (см. [10]).

Теорема 3.1. *Пусть $n \geq 2$ и $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная выпуклая область, а $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, граница которой представляет собой $(n-1)$-мерное многообразие класса C^0 без края, причем U_2 обладает свойством: внутренняя метрика этой области может быть продолжена по непрерывности в ее замыкание $\operatorname{cl} U_2$. Далее, предположим к тому же, что границы $\operatorname{fr} U_1$ и $\operatorname{fr} U_2$ областей U_1 и U_2 изометричны в своих относительных метриках, т.е. что существует сюръективное и изометрическое в относительных метриках границ отображение $f : \operatorname{fr} U_1 \to \operatorname{fr} U_2$ $(\rho_{\operatorname{fr} U_2, U_2}(f(x'), f(x'')) = \rho_{\operatorname{fr} U_1, U_1}(x', x'')$, если $x', x'' \in \operatorname{fr} U_1)$. Тогда U_1 и U_2 изометричны (в евклидовых метриках).*

Замечание 3.1. Хотя теорема 3.1 представляет собой по форме несколько более общее утверждение в сравнении с соответствующей ей теоремой 3 в [10], тем не менее теорема 3.1 по сути эквивалентна последней (и доказывается дословным повторением рассуждений из доказательства теоремы 3 в [10]).

Обращаем внимание читателя на то, что в силу теоремы 3.1 подход к задачам однозначной определенности поверхностей, основывающийся на приведенном ниже определении 3.1, в отличие от классического подхода Коши (см. пример 4.1 в следующем разделе) позволяет придавать содержательный характер этим задачам и в случае $n = 2$. Следующая теорема, принадлежащая В. А. Александрову [2], показывает, что выпуклость рассматриваемых областей и связность их границ при новом подходе также оказываются несущественными.

Теорема 3.2. *Пусть U_1 и U_2 — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, замыкание $\operatorname{cl} U_j$, $j = 1, 2$, каждой из которых представляет собой многоообразие класса C^1 размерности n с краем $\operatorname{fr} U_j$.*

Тогда если границы $\operatorname{fr} U_1$ *и* $\operatorname{fr} U_2$ *этих областей изометричны в их относительных метриках, то и сами области* U_1 *и* U_2 *изометричны.*

Теорема 3.2 допускает обобщение на случай областей U с кусочно-гладкими границами, удовлетворяющих следующим условиям (все многообразия, рассматриваемые ниже в условиях (i)–(v), не имеют края).

(i) Граница $\operatorname{fr} U$ области U — топологическое многообразие размерности $n-1$.

(ii) Множество $\operatorname{fr} U$ является псевдомногообразием (в смысле понятий из [20]) класса C^1 и размерности $n-1$. Последнее означает, что существует подмножество E границы $\operatorname{fr} U$, открытое относительно $\operatorname{fr} U$ и представляющее собой многообразие класса C^1 размерности $n-1$, такое, что его дополнение $\operatorname{fr} U \setminus E$ в $\operatorname{fr} U$ можно представить в виде не более чем счетного объединения C^1-гладких многообразий размерности $k \le n-2$. При этом мы предполагаем дополнительно, что $\operatorname{fr} U \setminus E$ — это объединение конечного множества связных многообразий указанного типа.

Замечание 3.2. Из условия (ii) вытекает, что граница $\operatorname{fr} U$ области U представляется в виде объединения $\bigcup\limits_{j=1}^{\nu} E_j$ конечного семейства $E_1, E_2, \dots, E_\nu$ связных C^1- гладких многообразий размерности $\dim E_j \le n-1$, $j = 1, 2, \dots, \nu$. Полагая, что в этом объединении число k (определенное в (ii)) наименьшее из возможных, и используя понятия, введенные в работе [2], мы будем называть каждое из множеств E_j $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ *гранью соответствующей размерности границы* $\operatorname{fr} U$ *области* U.

(iii) Пусть некоторая точка грани E_j границы $\operatorname{fr} U$ является предельной для грани E_s $(j, s = 1, 2, \dots, \nu)$. Тогда $E_j \subset \operatorname{cl} E_s$.

(iv) Если $x \in E_j$, причем $\dim E_j \le n-2$, то контингенция области U в точке x содержит открытый конус $K \ne \varnothing$ и некоторая поверхностная окрестность точки x является объединением конечного множества $\{G_1, G_2, \dots, G_l\}$ многообразий G_j, $j = 1, 2, \dots, l$, класса C^1, таких, что существуют C^1-гладкие многообразия $\tilde G_1, \tilde G_2, \dots, \tilde G_l$ со свойствами $\dim \tilde G_j = \dim G_j$, $G_j \subset \tilde G_j$ и $x \in \tilde G_j$, $j = 1, 2, \dots, l$.

(v) Если точка $x \in \{\operatorname{fr} U\} \setminus E$ есть точка нульмерной грани, то x достижима в U по спрямляемому пути (т.е. для такой точки существует спрямляемый путь $\gamma : [0,1] \to \operatorname{cl} U$, такой, что $\gamma(1) = x$ и $\gamma(t) \in U$, если $0 \le t < 1$).

Теорема 3.3. *Предположим, что* U_1 *и* U_2 — *ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, *с кусочно-гладкими границами* (*т.е. с границами, удовлетворяющими условиям* (i)–(v)). *Тогда изометричность границ* $\operatorname{fr} U_1$ *и* $\operatorname{fr} U_2$ *этих областей в относительных метриках влечет изометричность самих областей* U_1 *и* U_2.

Мы представим сейчас утверждения данного раздела в несколько иной, эквивалентной форме, которая при формулировании аналогичных утверждений в дальнейшем изложении послужит для нас образцом. С этой целью обозначим символом $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ класс всех ограниченных областей U пространства $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, следующего типа: замыкание $\operatorname{cl} U$ области U есть n-мерное многообразие класса C^0 с краем $\operatorname{fr} U$, причем внутренняя метрика этой области может быть продолжена по непрерывности в ее замыкание. И затем введем следующее понятие, которое является одним из основных в данной работе.

Определение 3.1. Пусть $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}_0$. Мы говорим, что *область* U *однозначно определяется в классе* $\mathcal{A}_0$ *относительной метрикой своей границы*, если выполнено следующее. Предположим, что область V принадлежит классу $\mathcal{A}_0$ и существует сюръективное отображение $f : \operatorname{fr} V \to \operatorname{fr} U$, сохраняющее относительную метрику границы, т.е. для любых двух точек x' и x'' границы $\operatorname{fr} V$ области V имеет место равенство

$$\rho_{\operatorname{fr} U, U}(f(x'), f(x'')) = \rho_{\operatorname{fr} V, V}(x', x'').$$

Тогда область V может быть изометрически отображена на область U (другими словами, U можно определить в классе $\mathcal{A}_0$ с точностью до возможного использования дополнительного изометрического преобразования пространства $\mathbb{R}^n$).

Используя это определение и обозначая символом $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(n)$ класс всех ограниченных областей U в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, замыкания которых представляют собой многообразия класса C^1 размерности n с краем $\operatorname{fr} U$, и символом $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(n)$ класс всех ограниченных областей (в $\mathbb{R}^n$) с кусочно-гладкими границами, мы можем переформулировать теоремы 3.1–3.3 следующим образом.

Каждая ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, однозначно определяется в классе $\mathcal{A}(n)$ относительной метрикой своей границы (теорема 3.1).

Если область U принадлежит классу $\mathcal{A}_1(n)$, $n \geq 2$, то она однозначно определяется в этом классе относительной метрикой своей границы (теорема 3.2).

Каждая область из класса $\mathcal{A}_2(n)$, $n \geq 2$, однозначно определяется в нем относительной метрикой своей границы (теорема 3.3).

Мы завершим данный раздел следствием 3.1 теоремы 3.3 (см. [2]).

Следствие 3.1. *Ограниченная многогранная область U (в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$), т.е. ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\operatorname{fr} U$, аффинная оболочка каждой из граней которой является плоскостью размерности, равной размерности этой грани, однозначно определяется в классе $\mathcal{A}_2(n)$ относительной метрикой своей границы.*

4. Случай неограниченных областей

В случае неограниченных областей ситуация с их однозначной определенностью относительными метриками границ резко отличается от случая ограниченных областей. Действительно, полупространство

$$\mathbb{R}^n_- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n < 0\}, \quad n \geq 2$$

(и, следовательно, любое n-мерное открытое полупространство пространства $\mathbb{R}^n$), не определяется однозначно относительной метрикой своей границы даже в классе всех областей, границы которых представляют собой вещественно аналитические многообразия размерности $n-1$ без края. Для того чтобы установить последнее, рассмотрим, например, следующую область:

$$U = \bigl\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \bigm| x_n < (x_{n-1})^2\bigr\}.$$

Граница этой области изометрична во внутренних метриках (границ) границе полупространства $\mathbb{R}^n_-$: не составляет большого труда проверить, что отображение $f : \operatorname{fr} U \to \operatorname{fr} \mathbb{R}^n_-$,

$$\begin{gathered} f : \bigl(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, (x_{n-1})^2\bigr) \mapsto \bigl(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, \\ 2^{-1} x_{n-1}\sqrt{1 + 4(x_{n-1})^2} + 4^{-1}\ln\bigl(2x_{n-1} + \sqrt{1 + 4(x_{n-1})^2}\bigr), 0\bigr), \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{gathered}$$

является сюръективным и изометрическим во внутренних метриках границ области U и полупространства $\mathbb{R}^n_-$. Учитывая еще выпуклость дополнения $\mathbb{R}^n \setminus U$ области U, мы убеждаемся также в том, что отображение f изометрично в относительных метриках границ $\operatorname{fr} U$ и $\operatorname{fr} \mathbb{R}^n_-$. Но в то же время сами эти области не являются изометричными друг другу.

Приступая к изложению основных результатов данного раздела, отметим прежде всего, что как и в предыдущем разделе мы рассматриваем сейчас только те области U в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые отличны от всего $\mathbb{R}^n$ и допускают продолжение внутренних метрик $\rho_{\operatorname{fr} U, U}$ по непрерывности в свои замыкания $\operatorname{cl} U$.

Мы начнем со следующего результата, принадлежащего А. Д. Александрову (см. [2]).

Теорема 4.1. *Если U_1 — строго выпуклая область (т.е. такая выпуклая область, граница которой не содержит прямолинейных отрезков), а U_2 любая, причем границы $\operatorname{fr} U_1$ и $\operatorname{fr} U_2$ изометричны в их относительных метриках $\rho_{\operatorname{fr} U_1, U_1}$ и $\rho_{\operatorname{fr} U_2, U_2}$, то U_1 и U_2 сами изометричны.*

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(n)$ — класс всех областей U в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые обладают непустыми ограниченными дополнениями и границы которых представляют собой связные многообразия класса C^1 размерности $n-1$ без края. В работе [3] получен следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть $n \geq 3$. Тогда каждая область $U \in \mathcal{B}$ определяется однозначно в классе $\mathcal{B}$ относительной метрикой своей границы.*

Замечание 4.1. Понятие однозначной определенности неограниченных областей строится по аналогии с определением 3.1.

При $n = 2$ теорема 4.2 перестает быть верной, что вытекает из такого примера.

Пример 4.1. Пусть U_1 и U_2 — неограниченные области в $\mathbb{R}^2$ с выпуклыми ограниченными дополнениями $\mathbb{R}^2 \setminus U_1$ и $\mathbb{R}^2 \setminus U_2$, для которых выполнено условие $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{cl} U_j \neq \varnothing$, $j = 1, 2$, и длины границ которых равны. Тогда границы $\operatorname{fr} U_1$ и $\operatorname{fr} U_2$ этих областей изометричны в своих внутренних, и, следовательно, в относительных метриках. Но в то же время сами области U_1 и U_2 (вообще говоря) не являются изометричными друг другу.

Следующая теорема, принадлежащая А. В. Кузьминых (см. [11]), дает полное решение задачи об однозначной определенности выпуклых областей в классе $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n)$ всех областей U в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, допускающих продолжения по непрерывности их внутренних метрик в замыкания $\operatorname{cl} U$.

Теорема 4.3. *Каждая выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, отличная от открытого полупространства в $\mathbb{R}^n$ и самого $\mathbb{R}^n$, однозначно определяется в классе $\mathcal{C}(n)$ относительной метрикой своей границы.*

Отметим, что теоремы 3.1 и 4.1 представляют собой частные случаи теоремы 4.3.

Обозначим символом $\Delta(U)$ внутренность выпуклой оболочки дополнения области U в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $\Delta(U) = \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n \setminus U))$. Справедливо следующее утверждение (см. [4]).

Теорема 4.4. *Предположим, что граница $\operatorname{fr} U$ области U в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является связным $(n-1)$-мерным многообразием класса C^1 без края и удовлетворяет условию $\operatorname{fr} U \subset \Delta(U)$. Тогда U однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе $\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \widetilde{\mathcal{A}}_1(n)$ всех областей в $\mathbb{R}^n$ с гладкими границами, т.е. областей V, замыкания $\operatorname{cl} V$ которых представляют собой многообразия класса C^1 размерности n с краем $\operatorname{fr} V$.*

В случае же областей с аналитическими границами, т.е. областей V в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, таких, что их замыкания $\operatorname{cl} V$ — (вещественно) аналитические многообразия размерности n с краем $\operatorname{fr} V$, имеет место (см. [4]) следующая теорема.

Теорема 4.5. *Каждая область U в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, со связной аналитической границей, такой, что $\operatorname{fr} U \cap \Delta(U) \neq \varnothing$, однозначно определяется относительной метрикой своей границы в классе $\mathcal{E} = \mathcal{E}(n)$ всех областей в пространстве $\mathbb{R}^n$ с аналитическими границами.*

При $n = 2$ теоремы 4.4 и 4.5 естественно дополняются такими утверждениями [4].

Теорема 4.6. *Предположим, что область U в $\mathbb{R}^2$ обладает связной гладкой границей и $\Delta(U)$ не является полуплоскостью. Тогда если U однозначно определяется в классе $\widetilde{\mathcal{A}}_1(2)$ областей с гладкими границами относительной метрикой своей границы, то $\operatorname{fr} U \subset \Delta(U)$.*

Теорема 4.7. *Предположим, что область U в $\mathbb{R}^2$ обладает связной аналитической границей. Тогда если U однозначно определяется в классе $\mathcal{E}(2)$ областей с аналитическими границами относительной метрикой своей границы, то $\operatorname{fr} U \cap \Delta(U) \neq \varnothing$.*

Заметим, что при $n \geq 3$ утверждения теорем 4.6 и 4.7 перестают быть верными (в этом случае условию «$\Delta(U)$ не является полуплоскостью» должно соответствовать условие «$\Delta(U)$ не является полупространством»). Действительно, если U представляет собой дополнение, например, замкнутого единичного шара $\operatorname{cl} B = \operatorname{cl} B(0,1)$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и область V с гладкой границей такова, что $\operatorname{fr} V$ изометрична в относительных метриках граничной сфере $\operatorname{fr} U$ области U, то используя лемму 4 из работы [10], нетрудно установить неограниченность области V. И так как из изометричности $\operatorname{fr} V$ и $\operatorname{fr} U$ в относительных метриках с очевидностью вытекает также ограниченность $\operatorname{fr} V$, то воспользовавшись теоремой 4.2, мы убеждаемся в изометричности V и U. Далее, $\Delta(U) = B$ и в силу этого $\operatorname{fr} U \setminus \Delta(U) = \operatorname{fr} U$. Следовательно, мы приходим к заключению о том, что при $n \geq 3$ естественного аналога теоремы 4.6 нет.

Что касается теоремы 4.7, то рассматривая в качестве области V в предыдущем примере область с аналитической границей, мы теми же рассуждениями, что и выше, устанавливаем изометричность областей V и U. Учитывая еще соотношения $\operatorname{fr} U \cap \Delta(U) = \operatorname{fr} B \cap B = \varnothing$, мы приходим к заключению о том, что при $n \geq 3$ теорема 4.7 перестает быть верной.

Теоремы 4.5 и 4.6 приводят нас, в частности, к такому утверждению.

Следствие 4.1. *При $n = 2$ существует область с аналитической границей, однозначно определяющаяся в классе $\mathcal{E}(2)$ областей с аналитическими границами относительной метрикой своей границы, а в классе $\widetilde{\mathcal{A}}_1(2)$ областей с гладкими границами — нет.*

Доказательство. Рассмотрим область
$$U = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (x_1)^4 + (x_2)^4 - (x_1)^2 - (x_2)^2 > 0\big\}.$$
Эта область обладает следующими свойствами:

(i) граница U связна и аналитична,

(ii) $\operatorname{fr} U \cap \Delta(U) \neq \varnothing$,

(iii) $\Delta(U)$ не является полуплоскостью,

(iv) $\operatorname{fr} U \setminus \Delta(U) \neq \varnothing$.

Следовательно, в силу теоремы 4.5, U однозначно определяется в классе $\mathcal{E}(2)$. В то же время из теоремы 4.6 вытекает, что U не определяется однозначно относительной метрикой своей границы в классе $\widetilde{\mathcal{A}}_1(2)$ областей с гладкими границами. □

Результаты работы [4] позволяют усилить следствие 4.1: в его формулировке класс областей с гладкими границами можно заменить классом областей, границы которых C^∞-гладки (C^k-гладки, $k = 2, 3, \dots$, и т. п. (см. [4])). Последнее вытекает из того факта, что теоремы 4.4 и 4.6 остаются верными, если в их формулировках вместо области U с гладкой границей и класса $\widetilde{\mathcal{A}}_1(n)$ (соответственно класса $\widetilde{\mathcal{A}}_1(2)$) рассмотреть область U с C^∞- (C^k-)гладкой границей и класс $\mathcal{A}^\infty(n)$ ($\mathcal{A}^k(n)$) (соответственно класс $\mathcal{A}^\infty(2)$ ($\mathcal{A}^k(2)$)) всех областей с такими же границами.

В заключение раздела отметим, что в теореме 4.6 условие «$\Delta(U)$ не является полуплоскостью» существенно (по этому поводу см. [4, $ 7, пример 3]).

5. О неустойчивости в теоремах об однозначной определенности

Рассмотрим вещественное число $K \geq 1$ и K-квазиизометрическое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, где U — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. При этом K-квазиизометричность отображения мы понимаем в следующем смысле.

Определение 5.1. Отображение f называется *K-квазиизометрическим*, если оно непрерывно и инъективно, причем в каждой точке $x \in U$ выполняются соотношения
$$K^{-1} \leq \varliminf_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq \varlimsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq K. \tag{5.1}$$
Мы будем также говорить, что f является K-квазиизометрическим отображением областей U и $U' = f(U)$.

Из этого определения непосредственно вытекает, что обратное отображение $f^{-1} : U' \to U$ K-квазиизометрического отображения f тоже K-квазиизометрично. Хорошо известно также, что 1-квазиизометрическое отображение является изометрическим отображением областей U и U', причем оно (единственным способом) продолжается до изометрии $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Предположим далее, что U_1 и U_2 — две области в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с гладкими границами (т.е. области, границы которых суть $(n-1)$-мерные многообразия класса C^1 без края), и рассмотрим K-квазиизометрическое отображение $f : U_1 \to U_2$ областей U_1 и U_2 $(= f(U_1))$. Известно, что при сделанных предположениях f продолжается до гомеоморфного отображения $\widetilde{f} : \operatorname{cl} U_1 \to \operatorname{cl} U_2$ замыканий $\operatorname{cl} U_1$ и $\operatorname{cl} U_2$ этих областей. Используя неравенства (5.1) в определении 5.1 K-квазиизометрического отображения, нетрудно показать, что граничное отображение $\psi = \widetilde{f}|_{\operatorname{fr} U_1}$ отображения f удовлетворяет следующему условию: для любых двух точек x' и x'' границы $\operatorname{fr} U_1$ области U_1 выполняются неравенства
$$K^{-1} \rho_{\operatorname{fr} U_1, U_1}(x', x'') \leq \rho_{\operatorname{fr} U_2, U_2}(\psi(x'), \psi(x'')) \leq K \rho_{\operatorname{fr} U_1, U_1}(x', x''). \tag{5.2}$$
Мы будем называть отображение $\psi : \operatorname{fr} U_1 \to \operatorname{fr} U_2$ границы $\operatorname{fr} U_1$ области U_1 на границу $\operatorname{fr} U_2$ области U_2, обладающее свойством (5.2), *K-квазиизометрическим в относительных метриках границ*.

Пусть теперь U_1 — ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а U_2 — ограниченная область, замыкание которой есть n-мерное многообразие класса C^0 с краем $\operatorname{fr} U_2$, причем U_2 допускает продолжение по непрерывности внутренней своей метрики в замыкание $\operatorname{cl} U_2$. Из теоремы 3.1 и определения (5.2) квазиизометрического отображения границ в их относительных метриках следует, что если границы областей U_1 и U_2 1-квазиизометричны в относительных метриках, то эти области изометричны. Возникает естественный вопрос: характеризует ли условие (5.2) граничные значения квазиизометрических отображений областей U_1 и U_2 в полном объеме. Иначе говоря, можно ли утверждать, что K-квазиизометрическое в относительных метриках границ отображение $\psi : \operatorname{fr} U_1 \to \operatorname{fr} U_2$ является граничным значением некоторого квазиизометрического отображения $f : U_1 \to U_2$ (возможно и с другим значением параметра квазиизометричности)? И хотя ответ на этот вопрос автору неизвестен, в [10] доказано утверждение, согласно которому условие (5.2) с $K = 1$ не является устойчивым в следующем смысле.

Теорема 5.1. *Для каждого натурального числа $n = 2, 3, \dots$ существует вещественное число $C = C(n) > 1$, удовлетворяющее следующему условию. Если ε — положительное вещественное число, то найдется ограниченная область U_ε в пространстве $\mathbb{R}^n$, допускающая продолжение по непрерывности ее внутренней метрики в замыкание $\operatorname{cl} U_\varepsilon$ этой области и обладающая границей $\operatorname{fr} U_\varepsilon$, $(1+\varepsilon)$-квазиизометричной граничной сфере $S(0,1)$ единичного шара $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ в относительных метриках границ, и, наконец, такая, что ее невозможно отобразить C-квазиизометрически на шар $B(0,1)$.*

Замечание 5.1. Как следует из доказательства этой теоремы, предложенного в [10] (см. доказательство теоремы 2 в [10]), область U_ε можно построить так, чтобы ее граница была гладким многообразием размерности $n-1$ без края.

Теорема 5.1 устанавливает отсутствие устойчивости в теореме 3.1 с точки зрения теории квазиизометрических отображений областей в $\mathbb{R}^n$. Тем не менее в статье [6] получено следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Предположим, что $n \geq 2$ и вещественные числа R_1 и R_2 удовлетворяют неравенствам $0 < R_1 \leq R_2 < \infty$. Тогда существуют положительные числа $C = C(n, R_1, R_2)$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, R_1, R_2)$ такие, что если $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и ограниченные области U_1 и U_2 в пространстве $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям:*

(i) *граница $\operatorname{fr} U_1$ области U_1 — $(n-1)$-мерное связное многообразие класса C^2 без края, причем в каждой точке $x \in \operatorname{fr} U_1$ для любого главного радиуса кривизны $R(x)$ поверхности $\operatorname{fr} U_1$ выполняются неравенства $0 < R_1 \leq R(x) \leq R_2 < \infty$,*

(ii) *область U_2 допускает введение относительной метрики ее границы,*

(iii) *границы областей U_1 и U_2 $(1+\varepsilon)$-квазиизометричны в относительных метриках их границ,*

то имеет место неравенство

$$d(U_1, U_2) \leq C\varepsilon^{1/4},$$

где

$$d(U_1, U_2) = \inf_{P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} \delta(\operatorname{cl} U_1, P(\operatorname{cl} U_2)), \tag{5.3}$$

при этом в (5.3) инфимум подсчитывается по множеству всех изометрий $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ и

$$\delta(\operatorname{cl} U_1, P(\operatorname{cl} U_2)) = \max\left\{ \max_{x \in P(\operatorname{cl} U_2)} \{\rho(x, \operatorname{cl} U_1)\}, \max_{x \in \operatorname{cl} U_1} \{\rho(x, P(\operatorname{cl} U_2))\} \right\},$$

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} |x - y|, \quad M \subset \mathbb{R}^n,$$

— это хаусдорфово расстояние между множествами $\operatorname{cl} U_1$ и $P(\operatorname{cl} U_2)$.

Теорему 5.2 полезно сравнить с теоремой Ю. А. Волкова о близости пространственной формы образа при $(1+\varepsilon)$-квазиизометрическом во внутренних метриках отображении замкнутой выпуклой поверхности к форме самой этой поверхности (см. [9]).

6. Области с хаусдорфовой границей

Рассмотренные нами выше области U удовлетворяют условию: внутренняя метрика области U продолжается по непрерывности в ее замыкание $\operatorname{cl} U$. Но такого рода условие исключает из рассмотрения даже области с (евклидовыми) границами очень простого геометрического строения. Примером такого рода областей может служить открытый куб в $\mathbb{R}^3$, «надрезанный» полуплоскостью:

$$U_1 = \big\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_j| < 1, j = 1, 2, 3\big\} \setminus \big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_3 = 0\big\}.$$

Еще один пример — область (в $\mathbb{R}^3$)

$$U_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{j=1}^{3} (x_j)^2 \leq 1, x_3 = 0\right\},$$

представляющая собой дополнение двумерного круга (до всего пространства $\mathbb{R}^3$).

Устранить указанный недостаток можно, если перейти от рассмотренных в предыдущих разделах евклидовых границ к границам, которые мы будем называть ниже хаусдорфовыми и которые определим следующим образом.

Определение 6.1. Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и ρ_U — ее внутренняя метрика. Пополним метрическое пространство (U, ρ_U) по Хаусдорфу, т.е. по внутренней его метрике ρ_U. Отождествляя точки построенного пополнения, соответствующие точкам области U, с самими этими точками и удаляя их из пополнения, мы получим метрическое пространство $(\operatorname{fr}_H U, \rho_{\operatorname{fr}_H U, U})$, совокупность $\operatorname{fr}_H U$ элементов которого называется *хаусдорфовой границей области* U, а $\rho_{\operatorname{fr}_H U, U}$ — *относительной метрикой ее хаусдорфовой границы*.

Замечание 6.1. Если область U допускает продолжение по непрерывности внутренней ее метрики ρ_U в замыкание $\operatorname{cl} U$, то тогда хаусдорфова граница $\operatorname{fr}_H U$ этой области (естественным способом) отождествляется с евклидовой.

Определение 6.2. Пусть $\mathcal{U}$ — некоторый класс областей пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Мы скажем, что *область $U \in \mathcal{U}$ однозначно определяется в классе $\mathcal{U}$ относительной метрикой своей хаусдорфовой границы*, если каждая область $V \in \mathcal{U}$, хаусдорфова граница которой изометрична в относительных метриках аналогичной границе области U, сама изометрична U (в евклидовых метриках).

Замечание 6.2. Изометричность хаусдорфовых границ областей U и V в их относительных метриках означает существование сюръективного изометрического отображения $f : (\operatorname{fr}_H U, \rho_{\operatorname{fr}_H U, U}) \to (\operatorname{fr}_H V, \rho_{\operatorname{fr}_H V, V})$ этих границ.

Отметим ряд свойств хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H U$ области U, которые потребуются нам ниже. С этой целью введем следующее понятие.

Определение 6.3. *Носителем элемента a хаусдорфовой границы* $\operatorname{fr}_H U$ *области* $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется точка x евклидовой границы $\operatorname{fr} U$, к которой сходится фундаментальная во внутренней метрике ρ_U последовательность $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ точек $x_j \in U$, представляющая элемент a.

Замечание 6.3. Понятие носителя $a \in \operatorname{fr}_H U$ введено корректно, так как от выбора конкретной фундаментальной во внутренней метрике последовательности, представляющей элемент a, оно не зависит.

Лемма 6.1. *Каждый элемент $a \in \operatorname{fr}_H U$ обладает единственным носителем x_a.*

Лемма 6.2. *Множество носителей x_a элементов $a \in \operatorname{fr}_H U$ всюду плотно (в евклидовой метрике) на евклидовой границе frU области U.*

Лемма 6.3. *Если a — элемент хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H U$ области U, то тогда его носитель x_a достижим из области U по спрямляемому пути $\gamma : [0,1] \to \operatorname{cl} U$, такому, что $\gamma(1) = x_a$, $\gamma(t) \in U$ при $0 \leq t < 1$ и для каждой последовательности $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ точек $t_j \in [0, 1[$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{j \to \infty} t_j = 1$, последовательность $\{\gamma(t_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ фундаментальна в метрике ρ_U и представляет граничный элемент a. С другой стороны, если точка $x \in \operatorname{fr} U$ достижима* *из области U по спрямляемому пути γ, то тогда любая последовательность $\{\gamma(t_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, где $t_j \in [0,1[$, $j = 1,2,\dots$, и $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = 1$, фундаментальна в метрике ρ_U и определяет* (*один и тот же*) *элемент $a \in \mathrm{fr}_H\, U$, носителем которого является точка x.*

Мы будем говорить далее о каждом спрямляемом пути γ из формулировки леммы 6.3, что он представляет соответствующий ему элемент $a \in \mathrm{fr}_H\, U$ (допуская при этом также, что $\gamma(0)$ может принадлежать евклидовой границе $\mathrm{fr}\, U$ области U).

Лемма 6.4. *Для любых двух элементов a и b хаусдорфовой границы $\mathrm{fr}_H\, U$ области U существует кратчайший спрямляемый путь γ, такой, что $\rho_{\mathrm{fr}_H U, U}(a,b)$ совпадает с длиной пути γ, $\gamma(0) = x_a$, $\gamma(1) = x_b$, $\gamma(t) \in \mathrm{cl}\, U$, если $t \in]0,1[$, наконец, γ является равномерным в евклидовой метрике пределом последовательности $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ спрямляемых путей $\gamma_j : [0,1] \to \mathrm{cl}\, U$, удовлетворяющих условиям $\gamma_j(0) = x_a$, $\gamma_j(1) = x_b$, $\gamma_j(t) \in U$, если $0 < t < 1$, и длина пути γ_j сходится к длине пути γ при $j \to \infty$.*

Замечание 6.4. Путь γ из формулировки леммы 6.4 мы называем ниже *кратчайшим путем, соединяющим в замыкании $\mathrm{cl}\, U$ области U элементы a и b хаусдорфовой границы $\mathrm{fr}_H\, U$ этой области*. Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что путь γ не обязан быть инъективным (!). Каждый из путей γ_j в лемме 6.4 представляет как элемент $a \in \mathrm{fr}_H\, U$, так и элемент $b \in \mathrm{fr}_H\, U$. О таких путях мы будем говорить далее, что *они соединяют элементы a и b хаусдорфовой границы $\mathrm{fr}_H\, U$ по области U*. Доказательства лемм 6.1–6.4 осуществляются стандартными приемами (например, эти леммы можно доказать, используя методы доказательств результатов первого и второго разделов второй главы в [1]), поэтому мы их опускаем.

Согласно следствию 4.1 существуют области U такие, что U однозначно определяется относительной метрикой своей границы в одном классе областей и не определяется в другом, более обширном классе. В этой связи возникает вопрос о существовании областей, определяющихся однозначно относительной метрикой своей границы в классе всех областей в пространстве $\mathbb{R}^n$. В качестве одного из возможных ответов на этот вопрос может служить следующее утверждение, обобщающее и усиливающее теорему 3.1 в случае $n = 2$.

Теорема 6.1. *Каждая ограниченная выпуклая область $U \subset \mathbb{R}^2$ однозначно определяется в классе всех областей $V \subset \mathbb{R}^2$ относительной метрикой своей хаусдорфовой границы* (*в смысле определения* 6.2).

Доказательство осуществляется по тому же плану, что и доказательство теоремы 3 в [10]. Но при этом приходится внести ряд изменений. Наиболее существенные из этих изменений относятся к лемме 4 в [10], формулировка которой в обсуждаемом сейчас общем случае выглядит так.

Лемма 6.5. *Пусть $f : \mathrm{fr}_H\, U \to \mathrm{fr}_H\, V$, где U — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^2$, а V — произвольная область в этом пространстве, является сюръективным изометрическим в относительных метриках $\rho_{\mathrm{fr}_H U, U}$ и $\rho_{\mathrm{fr}_H V, V}$ хаусдорфовых границ $\mathrm{fr}_H\, U$ и $\mathrm{fr}_H\, V$ областей U и V отображением. Предположим далее, что прямолинейный отрезок $xy = \{(1-t)x + ty \in \mathrm{cl}\, U \mid 0 \le t \le 1\}$ содержится в замыкании $\mathrm{cl}\, U$ области U так, что границе $\mathrm{fr}\, U$ этой области принадлежат только лишь концы x и y отрезка. Тогда прямолинейный отрезок $x'y'$, концы x' и y' которого суть носители элементов $f(x)$ и $f(y)$ хаусдорфовой границы $\mathrm{fr}_H\, V$, не вырождается в точку и таким же способом содержится в замыкании $\mathrm{cl}\, V$ области V.*

Доказательство леммы 6.5. Пусть $\tilde f : \mathrm{fr}\, U \to \mathrm{fr}\, V$ — отображение, представляющее собой композицию
$$\tilde f = p_V \circ f \circ (p_U)^{-1}, \tag{6.1}$$
где p_V — отображение $p_V : a \mapsto x_a$, $a \in \mathrm{fr}_H\, V$, ставящее в соответствие каждому элементу a хаусдорфовой границы $\mathrm{fr}_H\, V$ области V его носитель x_a, и $p_U : \mathrm{fr}_H\, U \to \mathrm{fr}\, U$ — аналогичное отображение хаусдорфовой границы $\mathrm{fr}_H\, U$ в евклидову границу $\mathrm{fr}\, U$ области U, которое в силу выпуклости U обратимо и изометрично. Принимая во внимание еще то, что f по условию леммы изометрично в относительных метриках хаусдорфовых границ $\mathrm{fr}_H\, U$ и $\mathrm{fr}_H\, V$, мы легко убеждаемся в липшицевости отображения $\tilde f$:
$$|\tilde f(x') - \tilde f(x'')| \le |x' - x''|, \tag{6.2}$$

если $x', x'' \in \operatorname{fr} U$.

Мы утверждаем, что отображение $\tilde{f}$ сюръективно. Предполагая противное, мы приходим к следующей ситуации: $E = \operatorname{fr} V \setminus \tilde{f}(\operatorname{fr} U) \neq \varnothing$, причем множество E открыто относительно $\operatorname{fr} V$. Последнее же вступает в противоречие с леммой 6.2. Следовательно,

$$\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{fr} V. \tag{6.3}$$

Из соотношений (6.2) и (6.3), в частности, следует, что евклидова граница $\operatorname{fr} V$ области V является ограниченным континуумом (т.е. непустым, ограниченным, замкнутым и связным множеством). В то же время из изометричности хаусдорфовых границ областей U и V в относительных метриках вытекает, что $\operatorname{fr} V$ содержит не менее двух точек.

Предположим теперь, что для отрезка $x'y'$, концы x' и y' которого являются носителями элементов $f(x)$ и $f(y)$ хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H V$ области V, представляющими собой образы точек x и y из формулировки доказываемой леммы, выполняется по крайней мере одно из условий:

1. отрезок $x'y'$ вырождается в точку и
2. хотя бы одна внутренняя точка этого отрезка не принадлежит V,

и рассмотрим кратчайший путь $\gamma : [0,1] \to \operatorname{cl} V$, соединяющий в замыкании $\operatorname{cl} V$ области V элементы $f(x)$ и $f(y)$. Возможны два случая:

(i) $V \cap \operatorname{Im} \gamma \neq \varnothing$ и

(ii) $\operatorname{Im} \gamma \subset \operatorname{fr} V$.

В случае (i) существуют точки $P, Q \in \operatorname{Im} \gamma$, такие, что $(1-\alpha)P + \alpha Q \in V \cap \operatorname{Im} \gamma$, если $0 < \alpha < 1$. Ясно, что хотя бы одна из этих точек отлична и от x', и от y'. Предположим для определенности, что таковой является точка P, и рассмотрим тройку $f(x)$, $f(y)$ и z элементов хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H V$ области V, где элемент z представлен путем $\gamma_* : [0,1] \to \operatorname{cl} V$, определяемым соотношением $\gamma_*(t) = (1-t)P + tQ$, $t \in [0,1[$. Мы сейчас покажем, что для этой тройки имеет место равенство

$$\rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(f(x), f(y)) = \rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(f(x), z) + \rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(z, f(y)), \tag{6.4}$$

которое (в силу того, что $\rho_{\operatorname{fr}_H V, V}$ — метрика) эквивалентно неравенству

$$\rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(f(x), f(y)) \geq \rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(f(x), z) + \rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(z, f(y)). \tag{6.5}$$

Для доказательства неравенства (6.5) зафиксируем последовательность $\{\gamma_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ спрямляемых путей $\gamma_j : [0,1] \to \operatorname{cl} V$, определяемых для элементов $f(x)$ и $f(y)$ хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H V$ леммой 6.4, и положим

$$G = \bigcup_{\substack{x=(1-\alpha)P+\alpha Q \\ 0<\alpha<1}} B_2(x, r_x), \tag{6.6}$$

где $B_2(x, r_x)$ — открытый круг в $\mathbb{R}^2$ с центром x и радиусом r_x, причем число r_x представляет собой супремум всех чисел $r > 0$ таких, что $B_2(x, r) \subset V$. Легко показать, что для замыкания $\operatorname{cl} G$ множества G, определяемого соотношением (6.6), справедливо равенство

$$\operatorname{cl} G = \Bigl\{ \bigcup_{\substack{x=(1-\alpha)P+\alpha Q \\ 0<\alpha<1}} \operatorname{cl} B_2(x, r_x) \Bigr\} \bigcup \{P, Q\}. \tag{6.7}$$

Пусть, далее, $t_0 \in \gamma^{-1}(P)$ и для каждого $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j(t_j)$ — это ближайшая к P точка множества $\{\operatorname{Im} \gamma_j\} \cap \{\operatorname{cl} G\}$. Так как последовательность $\{\gamma_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ равномерно (в евклидовой норме) сходится к пути γ, то в силу определения множества G и того факта, что образ непрерывного пути является континуумом, имеем

$$\lim_{j \to \infty} \gamma_j(t_j) = \gamma(t_0).$$

Учитывая соотношение (6.7), мы можем достроить каждый из путей $\gamma_j|_{[0,t_j]}$ и $\gamma_j|_{[t_j,1]}$ двузвенной ломаной, которая состоит из отрезка $\{\gamma_j(t_j)\}w$, где $w \in PQ$, перпендикулярного отрезку PQ, и отрезка wP. В итоге мы получим для достаточно больших значений параметра j спрямляемые пути $\gamma_j^s : [0,1] \to \operatorname{cl} V$, $s = 1, 2$, соединяющие по области V элементы $f(x)$ и z и z и $f(y)$ хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H V$ этой области, т.е. такие спрямляемые пути, что $\gamma_j^1(0) = x'$, $\gamma_j^1(1) = P$, $\gamma_j^2(0) = P$, $\gamma_j^2(1) = y'$ и $\gamma_j^s(t) \in V$, если $0 < t < 1$ $(s = 1, 2)$. Из способа построения путей γ_j^s вытекает, что

$$\rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(f(x), z) + \rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(z, f(y)) \le l(\gamma_j^1) + l(\gamma_j^2) \le \\ l(\gamma_j) + 4|\gamma_j(t_j) - P| \to l(\gamma) = \rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(f(x), f(y))$$

при $j \to \infty$. В итоге мы получаем искомое неравенство (6.5).

Пусть теперь выполняется условие (ii) (т.е. пусть $\operatorname{Im}\gamma \subset \operatorname{fr} V$). Так как

$$l(\gamma) = \rho_{\operatorname{fr}_H V, V}(f(x), f(y)) = \rho_{\operatorname{fr}_H U, U}(x, y) > 0,$$

то $\operatorname{diam}(\operatorname{Im}\gamma) > 0$. Учитывая, что $\operatorname{Im}\gamma$ — континуум, выберем направление λ такое, что проекция $\operatorname{Im}\gamma$ на прямую, ортогональную λ, представляет собой невырожденный отрезок. Не умаляя общности, будем считать, что направление λ — это направление вектора e_2 канонического базиса e_1, e_2 в $\mathbb{R}^2$. Тогда проекция $\operatorname{Im}\gamma$ на координатную ось $\{x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ является невырожденным отрезком I. Предположим, что последовательность $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ спрямляемых путей имеет тот же смысл, что и в предыдущем случае (i). Из того обстоятельства, что каждая прямая, перпендикулярная отрезку I и проходящая через его внутреннюю точку x, имеет непустое пересечение с $\operatorname{Im}\gamma$, мы в силу равномерной сходимости последовательности $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ к пути γ можем утверждать, что этим свойством обладает и $\operatorname{Im}\gamma_j$ для достаточно больших j (здесь мы приняли во внимание то обстоятельство, что $\operatorname{Im}\gamma_j$ — континуум). Учитывая еще тот факт, что из соотношений (6.2) вытекает конечность длины $\Lambda_1(\operatorname{fr} V)$ (в смысле понятий из [16, с. 84]) множества $\operatorname{fr} V$, и применяя теорему Гросса (см. [16, с. 403]), мы можем утверждать следующее: для почти всех точек $x \in I$ прямая ζ_x, проходящая через точку x и перпендикулярная отрезку I, имеет конечные и непустые множества общих с $\operatorname{fr} V$ и соответственно с $\operatorname{Im}\gamma$ точек. Пусть x_0 — внутренняя точка этого типа отрезка I, такая, что ζ_{x_0} не содержит носителей x' и y' элементов $f(x)$ и $f(y)$ хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H V$ области V. Так как из отмеченного выше вытекает, что для всех достаточно больших значений j прямая ζ_{x_0} имеет общие точки с множеством $\operatorname{Im}\gamma_j$, то в силу равномерной сходимости γ_j к γ при $j \to \infty$ существует последовательность точек, принадлежащих множеству $\zeta_{x_0} \cap U$, которая сходится к некоторой точке $y \in \operatorname{Im}\gamma$, причем так, что все точки этой последовательности расположены ниже точки y, либо все они находятся выше y. Но тогда существует (не вырождающийся в точку) отрезок $J \subset \zeta_{x_0} \cap \operatorname{cl} U$, такой, что один из его концов — это точка y, $(J \setminus \{y\}) \subset U$ и для ближайшей к y точке $Q_k = \gamma_{j(k)}(t_{j(k)})$ множества J, которая определена для каждого значения некоторой последовательности $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющей условию $j(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \lim_{k\to\infty} \gamma_{j(k)}(t_{j(k)}) = y.$$

Достраивая пути $\gamma_{j(k)}|_{[0, t_{j(k)}]}$ и $\gamma_{j(k)}|_{[t_{j(k)}, 1]}$ отрезком $Q_k y$ и следуя почти дословно использованным в случае (i) рассуждениям, мы снова приходим к равенству (6.4), в котором сейчас z — это элемент хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H V$, определяемый в силу леммы 6.3 отрезком J и отличный от элементов $f(x)$ и $f(y)$.

Для завершения доказательства леммы 6.5 нам осталось заметить, что как в случае (i), так и в случае (ii) из вышеизложенного вытекают соотношения $x \ne y$, $x \ne f^{-1}(z)$, $y \ne f^{-1}(z)$ и, следовательно, неравенство

$$\rho_{\operatorname{fr}_H U, U}(x, y) < \rho_{\operatorname{fr}_H U, U}(x, f^{-1}(z)) + \rho_{\operatorname{fr}_H U, U}(f^{-1}(z), y),$$

которое в силу равенства (6.4) вступает в противоречие с изометричностью в относительных метриках хаусдорфовых границ отображения f. $\square$

Возвращаясь к теореме 6.1, отметим, что дальнейшее ее доказательство осуществляется на основе леммы 6.5, если при этом применить соображения, использованные в доказательстве теоремы 3 в [10], но не к отображению f, рассмотренному в формулировке леммы 6.5, а к отображению $\tilde{f}$, которое определяется по отображению f соотношением (6.1). Подробности необходимых рассуждений очевидны, поэтому мы их опускаем.

Замечание 6.5. В 1987 г. Д. А. Троценко опубликовал в [18] без доказательства утверждение, которое в терминах данного раздела нашей статьи можно сформулировать следующим образом.

Любая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ однозначно определяется в классе всех областей $V \subset \mathbb{R}^2$ относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.

В процессе написания настоящей статьи ее автор обратился к Д. А. Троценко по поводу доказательства этого утверждения. Но предъявить его доказательство, а также доказательства остальных утверждений из [18] Троценко не смог, что на данный момент, к сожалению, позволяет рассматривать все эти утверждения только лишь в качестве декларации о намерениях Д. А. Троценко их получить.

Следующая теорема, доказанная в статье [5], дает пример областей уже в пространстве $\mathbb{R}^n$ любой размерности $n \geq 2$, для обсуждения и решения проблемы однозначной определенности которых необходимо привлекать к рассмотрению хаусдорфовы границы областей.

Теорема 6.2. *Каждая ограниченная область U в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с полиэдральной границей однозначно определяется в классе всех таких областей относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.*

В формулировке теоремы 6.2 область с полиэдральной границей — это область, граница которой является полиэдром, т.е. множеством, представляющим собой объединение конечного множества клеток (быть может, разных размерностей), где клетка — ограниченное множество, являющееся пересечением конечного набора замкнутых полупространств. Отметим также, что граница области обсуждаемого сейчас типа не обязана быть связной.

В заключение раздела, пользуясь понятием хаусдорфовой границы области, представим теорему А. В. Погорелова об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей в полной ее формулировке (во введении мы предполагали, что замыкание рассматриваемой области — липшицево многообразие) следующим образом:

Каждая область U в пространстве $\mathbb{R}^3$, дополнение которой $\mathbb{R}^3 \setminus U$ — ограниченное выпуклое множество, определяется однозначно в классе всех таких областей относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.

Замечание 6.6. Случай, когда дополнение $\mathbb{R}^3 \setminus U$ области U — одномерный отрезок, в классической формулировке этой теоремы не рассматривался. Но хотя он и тривиален, приведенная сейчас формулировка позволяет представить теорему Погорелова во всей ее полноте.

7. Однозначная определенность областей (локальный вариант)

В предыдущих разделах мы рассматривали задачу об однозначной определенности областей относительными метриками их границ. В данном разделе мы представим ряд результатов, позволяющих давать ответ на следующий естественный вопрос. Достаточно ли для изометричности областей в евклидовых пространствах предполагать, что их границы (евклидовы, хаусдорфовы) изометричны в своих относительных метриках, так сказать, на локальном уровне?

Определение 7.1. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторый класс областей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Мы говорим, что область $U \in \mathcal{M}$ *однозначно определяется в классе $\mathcal{M}$ условием локальной изометричности в относительных метриках хаусдорфовых границ областей*, если из того, что область V принадлежит классу $\mathcal{M}$, а ее хаусдорфова граница локально изометрична в относительных метриках хаусдорфовой границе области U, вытекает изометричность областей U и V (в евклидовых метриках). При этом *локальная изометричность в относительных метриках хаусдорфовых границ $\mathrm{fr}_H U$ и $\mathrm{fr}_H V$ областей U и V* означает существование биективного отображения $f : \mathrm{fr}_H U \to \mathrm{fr}_H V$ этих границ, *локально изометрического в их относительных метриках*, т.е. такого отображения, что для каждого элемента $y \in \mathrm{fr}_H U$ найдется число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию: для любых двух элементов a и b из ε-окрестности $Z(y) = \{z \in \mathrm{fr}_H U \mid \rho_{\mathrm{fr}_H U,U}(z, y) < \varepsilon\}$ элемента y выполнено равенство $\rho_{\mathrm{fr}_H U,U}(a, b) = \rho_{\mathrm{fr}_H V,V}(f(a), f(b))$.

Понятие однозначной определяемости областей условием локальной изометричности в относительных метриках евклидовых границ вводится аналогичным образом. При этом предполагается, что области допускают продолжение по непрерывности внутренних метрик в свои замыкания.

Первые результаты, относящиеся к рассматриваемому в настоящем разделе направлению исследований однозначной определенности областей условием локальной изометричности в относительных метриках их границ, получены А. В. Кузьминых в статье [11]. Мы начнем их обсуждение с такого его результата.

Теорема 7.1. *Предположим, что U — выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, евклидова граница $\operatorname{fr} U$ которой не содержит полосы, т.е. выпуклой оболочки двух параллельных $(n-2)$-мерных плоскостей, V — область (в $\mathbb{R}^n$), допускающая продолжение по непрерывности ее внутренней метрики ρ_V в замыкание $\operatorname{cl} V$ этой области, ε — положительное число и $f : \operatorname{fr} U \to \operatorname{fr} V$ — биективное отображение такое, что для каждого числа $\alpha \in \,]0, \varepsilon[$ и для любых двух точек $x', x'' \in \operatorname{fr} U$*

$$\rho_{\operatorname{fr} U, U}(x', x'') = \alpha \tag{7.1}$$

в том и только том случае, если

$$\rho_{\operatorname{fr} V, V}(f(x'), f(x'')) = \alpha. \tag{7.2}$$

Тогда f может быть продолжено до изометрии $F : U \to V$ в евклидовых метриках.

Предположим далее, что выпуклая область $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ отлична от открытого полупространства, причем ее (евклидова) граница содержит полосу. Ясно, что $\operatorname{cl} U = \Phi \times P$, где Φ — двумерное выпуклое множество, а P — плоскость размерности $n-2$, ортогональная аффинной оболочке $A(\Phi)$ множества Φ.

Если область U такова, что Φ — ограниченное множество, то справедливо следующее утверждение (см. [11]).

Теорема 7.2. *Пусть область V в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, не содержит полупространства и допускает продолжение по непрерывности ее внутренней метрики ρ_V в замыкание $\operatorname{cl} V$, ε — положительное число и $f : \operatorname{fr} U \to \operatorname{fr} V$ — биективное отображение* (*где U удовлетворяет условиям из предыдущих двух абзацев*)*, такое, что для каждого $\alpha \in \,]0, \varepsilon[$ и для любых двух точек $x', x'' \in \operatorname{fr} U$ равенство* (7.1) *выполняется в том и только том случае, если эти точки удовлетворяют условию* (7.2). *Тогда f может быть продолжено до изометрии областей U и V.*

В теореме 7.2 условие «V не содержит полупространства» существенно, также как существенно и условие «Φ — ограниченное множество» (см. [11]).

Из теорем 7.1 и 7.2 вытекает, что если ограничиться рассмотрением лишь областей, не содержащих полупространства, то имеет место такое утверждение.

Следствие 7.1. *Предположим, что выпуклая область U в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, не содержит полупространства. Тогда условие, состоящее в том, что ее граница $\operatorname{fr} U$ не содержит полосы или гомеоморфна декартову произведению окружности на $(n-2)$-мерную плоскость, необходимо и достаточно для того, чтобы область U обладала следующим свойством: если область $V \subset \mathbb{R}^n$ не содержит полупространства и допускает продолжение по непрерывности ее внутренней метрики ρ_V в замыкание $\operatorname{cl} V$, ε — положительное число и $f : \operatorname{fr} U \to \operatorname{fr} V$ — биекция такая, что для каждого $\alpha \in \,]0, \varepsilon[$ и любых двух точек $x', x'' \in \operatorname{fr} U$ условия* (7.1) *и* (7.2) *эквивалентны, то f продолжается до изометрии областей U и V.*

Следующие два результата получены М. К. Боровиковой в [8]. Первый из них содержит полное описание той ситуации, когда ограниченная многоугольная область в $\mathbb{R}^2$ однозначно определяется в классе всех таких областей условием локальной изометричности в относительных метриках хаусдорфовых границ областей.

Теорема 7.3. *Для того чтобы ограниченная многоугольная область U в $\mathbb{R}^2$ однозначно определялась в классе всех таких областей условием локальной изометричности в относительных метриках хаусдорфовых границ областей, необходимо и достаточно, чтобы U была выпуклой.*

Заметим, что от условия «U — ограниченнная область» в формулировке теоремы 7.3 отказаться невозможно (см. [8]).

Второй результат Боровиковой дает следующее решение аналогичной задачи в случае областей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с аналитическими границами.

Теорема 7.4. *Предположим, что евклидова граница области U в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является связным $(n-1)$-мерным (вещественно) аналитическим многообразием без края. Тогда для того чтобы область V с такого же рода границей $\operatorname{fr} V$, локально изометричной в относительных метриках границе $\operatorname{fr} U$ области U, была изометрична самой области U, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

(i) $\mathbb{R}^n \setminus U$ *не является выпуклым множеством*;

(ii) *если множество $\mathbb{R}^n \setminus U$ выпукло, то выпуклая поверхность $\operatorname{fr} U$ однозначно определяется своей внутренней метрикой в классе выпуклых аналитических поверхностей.*

Мы завершим раздел результатом В. А. Александрова из работы [7], который позволяет заключить, что возникающая в случае областей в $\mathbb{R}^3$ ситуация принципиально отличается от той, которая в силу теоремы 7.3 Боровиковой имеет место в случае двумерных многоугольных областей. С этой целью напомним ряд понятий из работы [7].

Имея дело с областью U с полиэдральной границей, мы будем предполагать, что $\operatorname{fr} U$ — *симплициальный комплекс*. Это предположение не умаляет общности, так как любой полиэдр допускает симплициальное разбиение (см. [19]).

Гранью размерности k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) *хаусдорфовой границы* $\operatorname{fr}_H U$ *области* U (с полиэдральной границей) называется такое линейно связное подмножество Q метрического пространства $(\operatorname{fr}_H U, \rho_{\operatorname{fr}_H U, U})$, что совокупность носителей всех элементов из Q является внутренностью некоторого k-мерного симплекса комплекса $\operatorname{fr} U \subset \mathbb{R}^3$. *Нульмерной гранью* называется элемент хаусдорфовой границы, носитель которого — нульмерный симплекс комплекса $\operatorname{fr} U$.

Малым остовом хаусдорфовой границы области U (с полиэдральной границей) называется объединение всех $(n-1)$-мерных граней и тех $(n-2)$-мерных граней хаусдорфовой границы $\operatorname{fr}_H U$ области U, каждая из которых лежит в замыкании хотя бы одной $(n-1)$-мерной грани. *Большим остовом хаусдорфовой границы области U* называется замыкание в метрике $\rho_{\operatorname{fr}_H U, U}$ объединения всех $(n-1)$-мерных граней хаусдорфовой границы области U.

Теорема 7.5. *Предположим, что область U в пространстве $\mathbb{R}^3$ обладает полиэдральной (компактной) границей, причем*

(i) *граница $\operatorname{fr} U$ области U является линейно связным множеством в $\mathbb{R}^3$*;

(ii) *большой остов хаусдорфовой границы области U есть линейно связное подмножество метрического пространства $(\operatorname{fr}_H U, \rho_{\operatorname{fr}_H U, U})$*;

(iii) *каждая компонента линейной связности дополнения в множестве $\operatorname{fr}_H U$ большого остова хаусдорфовой границы области U представляет собой объединение одномерной грани хаусдорфовой границы этой области и лежащей в ее замыкании нульмерной грани*;

(iv) *каждая компонента линейной связности малого остова хаусдорфовой границы области U гомеоморфна двумерной сфере, из которой удалено конечное множество точек.*

Тогда область U однозначно определяется в классе всех областей в $\mathbb{R}^3$ условием локальной изометричности в относительных метриках хаусдорфовых границ областей.

Отметим, что хотя граница области U в формулировке теоремы 7.5 компактна, сама область U может быть и неограниченной.

Из теоремы 7.5 вытекает, в частности, что если U и V — ограниченные многогранники в $\mathbb{R}^3$, границы которых локально изометричны в относительных метриках, то эти многогранники изометричны (в евклидовых метриках).

Замечание 7.1. Ни от одного из условий (i)-(iii) в теореме 7.5 нельзя отказаться.

8. Об однозначной определенности конформного типа

В предыдущих разделах мы рассматривали проблему однозначной определенности областей в евклидовых пространствах, которая имеет, так сказать, изометрический тип. Другими словами, мы обсуждали задачу, состоящую в выяснении вопроса о том, являются ли изометричными две области U и V в $\mathbb{R}^n$, если их границы изометричны в том или ином смысле.

Настоящий раздел мы посвящаем дальнейшему развитию тематики, связанной с указанной выше задачей, рассматривая в нем проблему однозначной определенности (областей в $\mathbb{R}^n$) конформного типа.

Перейдем к подробному изложению содержания раздела.

Определение 8.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — область с липшицевой границей (т.е. область, граница $\operatorname{fr} U$ которой — липшицево многообразие размерности $n-1$ без края). *Граничным конденсатором* $F = \{F_1, F_2\}$ *области* U называется пара замкнутых подмножеств F_1 и F_2 границы $\operatorname{fr} U$ этой области (хотя бы одно из которых ограничено), не имеющих общих точек, при этом F_1 и F_2 называются *обкладками* (*компонентами*) *конденсатора* F. Если V — еще одна такая область в $\mathbb{R}^n$, $f : \operatorname{fr} V \to \operatorname{fr} U$ — гомеоморфное отображение границ $\operatorname{fr} V$ и $\operatorname{fr} U$ областей V и U и $F = \{F_1, F_2\}$ — граничный конденсатор области V, то *образ* $f(F) = \{f(F_1), f(F_2)\}$ *граничного конденсатора* F *при отображении* f — это граничный конденсатор области U, обкладками которого служат множества $f(F_1)$ и $f(F_2)$.

Определение 8.2. *Относительным конформным модулем* $M^U(F)$ *граничного конденсатора* F *области* U называется n-модуль $M_n(\Gamma_{F_1,F_2,U})$ семейства $\Gamma_{F_1,F_2,U}$ всех (непрерывных) путей $\gamma : [0,1] \to \operatorname{cl} U$, соединяющих обкладки F_1 и F_2 конденсатора F в области U (т.е. $\gamma(0) \in F_1$, $\gamma(1) \in F_2$ и $\gamma(t) \in U$, если $0 < t < 1$; см. раздел 2).

Пусть $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(n)$ — некоторый подкласс класса $\mathcal{L} = \mathcal{L}(n)$ всех областей U в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, замыкание каждой из которых представляет собой n-мерное липшицево многообразие (с краем $\operatorname{fr} U \neq \varnothing$).

Определение 8.3. Скажем, что *область* $U \in \mathcal{L}_0$ *однозначно определяется относительными конформными модулями своих граничных конденсаторов в классе* $\mathcal{L}_0$, если выполнено следующее. Предположим, что область V принадлежит классу $\mathcal{L}_0$ и существует гомеоморфное отображение $f : \operatorname{fr} V \to \operatorname{fr} U$ границы $\operatorname{fr} V$ области V на границу $\operatorname{fr} U$ области U, сохраняющее относительные конформные модули граничных конденсаторов: $M^V(F) = M^U(f(F))$ для каждого граничного конденсатора F области V. Тогда область V может быть отображена посредством конформного отображения на область U (иначе говоря, U можно определить в классе $\mathcal{L}_0$ с точностью до возможного использования дополнительного преобразования Мёбиуса).

Теорема 8.1. *Предположим, что* $n \geq 4$. *Тогда каждая ограниченная выпуклая многогранная область* $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ (*т.е. непустое ограниченное пересечение конечного множества открытых* n*-мерных полупространств*) *однозначно определяется относительными конформными модулями своих граничных конденсаторов в классе* $\mathcal{P}$ *всех ограниченных выпуклых многогранных областей* $V \subset \mathbb{R}^n$. *При этом* U_1 *можно определить в классе* $\mathcal{P}$ *с точностью до возможного использования дополнительного преобразования подобия, т.е. аффинного конформного преобразования.*

Теорема 8.1 — центральное утверждение раздела и одно из основных в данной работе. Учитывая, что оно впервые предъявляется вниманию читателя, мы сопроводим его полным доказательством.

Пусть U_1 — это область из условия теоремы, U_2 — область из класса $\mathcal{P}$ и $f : \operatorname{fr} U_1 \to \operatorname{fr} U_2$ — гомеоморфное отображение границы $\operatorname{fr} U_1$ области U_1 на границу $\operatorname{fr} U_2$ области U_2, сохраняющее относительные конформные модули граничных конденсаторов. Мы покажем, что существует аффинное конформное отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $U_2 = F(U_1)$ и $f = F|_{\operatorname{fr} U_1}$.

С этой целью предположим, что T^1_{n-2} и T^2_{n-2} представляют собой объединения всех граней размерности $n-2$ границ $\operatorname{fr} U_1$ и $\operatorname{fr} U_2$ выпуклых многогранников $\operatorname{cl} U_1$ и $\operatorname{cl} U_2$ соответственно. И затем рассмотрим множества $\Sigma_1 = \operatorname{fr} U_1 \setminus \{T^1_{n-2} \cup f^{-1}(T^2_{n-2})\}$ и $\Sigma_2 = \operatorname{fr} U_2 \setminus \{f(T^1_{n-2}) \cup T^2_{n-2}\} = f(\Sigma_1)$, которые являются всюду плотными подмножествами границ $\operatorname{fr} U_1$ и $\operatorname{fr} U_2$, открытыми в топологиях этих границ, индуцированных евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^n$. Мы утверждаем, что ограничение $f|_{\Sigma_1}$ отображения f на Σ_1 является $(n-1)$-мерным конформным отображением.

Действительно, пусть σ — компонента связности множества Σ_1. В силу определения последнего σ представляет собой подмножество некоторой $(n-1)$-мерной грани s многогранника $\operatorname{cl} U_1$. По аналогичной причине множество $\tilde{\sigma} = f(\sigma)$ есть подмножество некоторой $(n-1)$-мерной грани $\tilde{s}$ многогранника $\operatorname{cl} U_2$. Принимая во внимание, что относительный конформный модуль $M^U(F)$ граничного конденсатора F области U является конформным инвариантом, мы можем (используя в случае необходимости дополнительные конформные отображения) прийти к следующей ситуации: $s, \tilde{s} \subset \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ и $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Предположим далее, что $x_0 \in \sigma$, и рассмотрим в гиперплоскости $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ $(n-1)$-мерный шар $B_{n-1}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r, x_n = 0\}$ такой, что $\operatorname{cl} B_{n-1}(x_0, 2r) \subset \sigma$, $\operatorname{cl} B_{n-1}(f(x_0), L(x_0, f, r)) \subset \tilde{\sigma}$ $(L = L(x_0, f, r) = \max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|)$ и $B_n^+(f(x_0), L(x_0, f, r)) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ \mid |y - f(x_0)| < L(x_0, f, r)\} \subset U_2$. Тогда для относительного конформного модуля $M^{U_2}(\{E_1, E_2\})$ граничного конденсатора $\{E_1, E_2\}$ области U_2, где $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - f(x_0)| = L(x_0, f, r), x_n = 0\}$ и $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - f(x_0)| = l(x_0, f, r), x_n = 0\}$ $(l = l(x_0, f, r) = \min\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|)$, справедлива следующая оценка:

$$nv_n \left(\ln \frac{L(x_0, f, r)}{l(x_0, f, r)} \right)^{1-n} \geq M^{U_2}(\{E_1, E_2\}) \tag{8.1}$$

(v_n — объем n-мерного единичного шара). Последнее вытекает из того, что семейство $\Gamma_{S_L, S_l, A} = \Gamma_{S_{n-1}(f(x_0), L), S_{n-1}(f(x_0), l), B_L \setminus \operatorname{cl} B_l}$ всех путей, соединяющих сферы $S_L = S_{n-1}(f(x_0), L)$ $(= \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - f(x_0)| = L\})$ и $S_l = S_{n-1}(f(x_0), l)$ в сферическом кольце $A = B_L \setminus \operatorname{cl} B_l = B_n(f(x_0), L) \setminus \operatorname{cl}\{B_n(f(x_0), l)\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid l < |y - f(x_0)| < L\}$, минорирует семейство Γ_{E_1, E_2, U_2}, и из теоремы 6.4 и утверждения из п. 7.5 монографии [23].

Обратимся теперь к величине $M^{U_1}(\{f^{-1}(E_1), f^{-1}(E_2)\})$, которая в силу условий нашей теоремы равна величине $M^{U_2}(\{E_1, E_2\})$. Предполагая r столь малым, что кроме указанных выше условий выполняется еще и условие

$$B_n^+(x_0, 2r)\, (= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < 2r,\ x_n > 0\}) \subset U_1,$$

мы получим сейчас такую оценку:

$$M^{U_1}(\{f^{-1}(E_1), f^{-1}(E_2)\}) \geq \lambda_n = \frac{(n-1)v_{n-1} \ln \sqrt{3}}{8} \left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}\right)} \right)^{1-n} \tag{8.2}$$

(здесь Γ — гамма-функция Эйлера). При этом мы воспользуемся результатами из статьи [24] и методами их доказательств, предложенными в этой статье, незначительно модифицируя их. В основе вывода неравенства (8.2) лежит следующее видоизменение теоремы 3.10 из [24], необходимое для наших целей и справедливое в случае любого $n \geq 3$.

Лемма 8.1. *Пусть p_1 и p_2 — две точки гиперплоскости $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$, такие, что $|p_j| = 1$, $j = 1, 2$, и пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся континуумы на этой гиперплоскости, причем F_1 ограничен и содержит точки 0 и p_1, в то время как F_2 неограничен и содержит точку p_2. Тогда*

$$M^{\mathbb{R}^n_+}(\{F_1, F_2\}) \geq \lambda_n.$$

Доказательство леммы 8.1 почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.10 из [24]. Единственное отличие состоит в том, что вместо сферических колец мы рассматриваем сейчас ту их часть (так сказать, «половину»), которая содержится в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$. При этом мы распространяем рассуждения из [24] на тот случай, когда $n \geq 4$, вместо инъективных путей рассматриваем произвольные непрерывные пути и используем теорему 10.2 из [23]. Подробности рассуждений мы опускаем, так как их воспроизведение не представляет больших трудностей.

Замечание 8.1. Значение константы λ_n определяется ходом указанного выше доказательства леммы 8.1 нашей работы и теоремой 10.2 из [23]:

$$\lambda_n = b_n \ln \sqrt{3},$$

где

$$b_n = 2^{-n-1}(n-1)v_{n-1} \left(\int\limits_0^\infty t^{-\frac{n-2}{n-1}} (1 + t^2)^{-\frac{1}{n-1}} dt \right)^{1-n}, \quad n = 3, 4, \ldots, \quad (b_2 = \frac{1}{2\pi}) \tag{8.3}$$

— постоянная из формулировки теоремы 10.2 в [23]. Так как

$$b_n = \frac{(n-1)v_{n-1}}{4} \left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}\right)} \right)^{1-n}, \quad n \geq 3$$

(где, как и в (8.2), Γ — гамма-функция Эйлера), то в итоге мы и приходим к значению величины λ_n, указанному в (8.2).

Замечание 8.2. Представляется весьма вероятным, что доказательство леммы 8.1 можно осуществить строго следуя тому плану, который избран в [23] для доказательства теоремы 11.9. Детальное обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи, поэтому мы его опускаем.

Возвращаясь к доказательству нашей теоремы, прежде всего заметим, что из (8.1) и (8.2) и равенства

$$M^{U_1}(\{f^{-1}(E_1), f^{-1}(E_2)\}) = M^{U_2}(\{E_1, E_2\})$$

вытекает следующее неравенство:

$$\frac{L}{l} \leq \exp\left\{\left(\frac{8nv_n}{(n-1)v_{n-1}\ln 3}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right\} = \Lambda_n. \tag{8.4}$$

В свою очередь неравенство (8.4) и произвол в выборе точки x_0 влекут соотношения

$$H(x, f) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{L(x, f, r)}{l(x, f, r)} \leq \Lambda_n$$

для каждой точки $x \in \sigma$ (в п. 22.2 монографии [23] $H(x, f)$ названо линейной дилатацией отображения f в точке x). Тем самым в силу теоремы 34.1 из [23] отображение $f|_\sigma$ является $(n-1)$-мерным квазиконформным. Отметим, что в силу тех же соображений обратное отображение $(f|_\sigma)^{-1}$ также квазиконформно. Мы установим далее, что в действительности отображение $f|_\sigma$ конформно.

С этой целью мы воспользуемся тем, что в силу свойств квазиконформных отображений (см., например, [23, 14]) отображение f mes_{n-1}-почти всюду дифференцируемо, якобиан $J(x, f) \neq 0$ mes_{n-1}-почти во всех точках $x \in \sigma$, причем если mes_{n-1}-почти во всех точках $x \in \sigma$ невырожденной дифференцируемости отображения f (т.е. mes_{n-1}-почти во всех точках x дифференцируемости таких, что $J(x, f) \neq 0$) производная (дифференциал) $f'(x)$ есть линейное конформное отображение, то тогда отображение $f|_\sigma$ конформно.

Итак, пусть $x_0 \in \sigma$ является точкой невырожденной дифференцируемости отображения f, причем $f'(x_0)$ не является конформным отображением. Рассмотрим точки $e_1, e_2 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ такие, что $|e_j| = 1$, $j = 1, 2$, и $|f'(x_0)e_1| = \max\limits_e |f'(x_0)e| > |f'(x_0)e_2| = \min\limits_e |f'(x_0)e|$, где максимум и минимум подсчитываются по множеству всех векторов e с $|e| = 1$. В силу конформной инвариантности относительных конформных модулей граничных конденсаторов можно считать, что $e_1, e_2, \dots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$ и, как и выше, $s, \tilde{s} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ и $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n_+$. Далее нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 8.2. *Предположим, что A_t — граничный конденсатор полупространства $\mathbb{R}^n_+$, обкладки которого суть отрезки $F_1 = F_1(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq \frac{t}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_j = 0,\ j = 3, 4, \dots, n\}$ и $F_2 = F_2(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq \frac{t}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_j = 0,\ j = 3, 4, \dots, n\}$, где $0 < t < \infty$. Тогда относительный конформный модуль $M(A_t) = M^{\mathbb{R}^n_+}(A_t)$ конденсатора A_t обладает следующими свойствами*:

(i) $0 < M(A_t) < \infty$;
(ii) $M(A_t) \to 0$, *при* $t \to 0$ *и* $M(A_t) \to \infty$, *если* $t \to \infty$;
(iii) $M(A_t)$ *представляет собой возрастающую* (*в широком смысле*) *функцию параметра* t: $M(A_{t_1}) \leq M(A_{t_2})$, *если* $t_1 < t_2$;
(iv) *если* $0 < t_1 < t_2 < \infty$, *то*

$$\frac{M_{t_2}}{M_{t_1}} \leq \frac{t_2}{t_1}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^n \setminus \{F_1 \cup F_2\}$ и семейство $\Gamma_{F_1, F_2, \mathbb{R}^n\setminus\{F_1\cup F_2\}}$ всех путей в $\mathbb{R}^n$, соединяющих F_1 и F_2 в $\mathbb{R}^n \setminus \{F_1 \cup F_2\}$. Учитывая, что $\Gamma_{F_1, F_2, \mathbb{R}^n_+} \subset \Gamma_{F_1, F_2, \mathbb{R}^n\setminus\{F_1\cup F_2\}}$, мы в силу теорем 6.2, 11.3 и 11.5 из [23] приходим к правому из неравенств (i).

Для доказательства левого воспользуемся следующим аналогом теоремы 10.12 из [23].

Лемма 8.3. *Предположим, что $0 < a < b$ и F_1 и F_2 — непересекающиеся множества такие, что $F_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$, $j = 1, 2$, и каждая сфера $S(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = t\}$, $a < t < b$, имеет общие точки как с F_1, так и с F_2. Если область $U \subset \mathbb{R}^n$ такова, что*

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid a < |x| < b\} \subset U,$$

то тогда

$$M_n(\Gamma_{F_1,F_2,U\setminus\{F_1\cup F_2\}}) \geq b_n \ln \frac{b}{a},$$

где $\Gamma_{F_1,F_2,U\setminus\{F_1\cup F_2\}}$ — семейство всех путей, соединяющих в $U \setminus \{F_1 \cup F_2\}$ множества F_1 и F_2, и величина b_n определена соотношением (8.3).

Заметим, что доказательство леммы 8.3 осуществляется почти дословным повторением доказательства теоремы 10.12 в [23]. При этом необходимо интегрирование по сферическому кольцу $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a < |x| < b\}$ заменить интегрированием по сферическому полукольцу $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid a < |x| < b\}$. Последнее приводит к тому, что константа c_n теоремы 10.12 (в [23]) заменяется в нашем случае константой b_n.

Учитывая конформную инвариантность n-модулей семейств путей и применяя лемму 8.3 к тому случаю, когда F_1 и F_2 — это обкладки граничного конденсатора A_t, началу координат соответствует точка $x_0 = (\frac{t}{2}, 0, \ldots, 0)$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}$ (при этом каждая сфера $S_{x_0}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = t\}$, $a < t < b$, пересекается и с F_1, и с F_2) и $U = \mathbb{R}^n_+$, мы приходим к неравенствам

$$M(A_t) \geq b_n \ln\left(2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}\right). \tag{8.6}$$

Отметим, что неравенство (8.6) влечет не только левое из неравенств (i) в формулировке леммы 8.2, но также и второе из утверждений (ii). Первое же из утверждений (ii) следует из теорем 6.4 и 7.5 из [23] и того факта, что при $0 < t < 2(\sqrt{2} + 1)$ семейство Γ_{S_1,S_2,R_t} всех путей, соединяющих в сферическом кольце $R_t = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{t}{\sqrt{2}} < |x - \frac{t+1}{2}e_2| < \frac{t+2}{2}\right\}$ граничные его сферы $S_1 = S_{n-1}\left(\frac{t+1}{2}e_2, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ и $S_2 = S_{n-1}\left(\frac{t+1}{2}e_2, \frac{t+2}{2}\right)$, минорирует семейство $\Gamma_{F_1,F_2,\mathbb{R}^n_+}$:

$$M(A_t) = M_n(\Gamma_{F_1,F_2,\mathbb{R}^n_+}) \leq M_n(\Gamma_{S_1,S_2,R_t}) = n v_n \left(\ln \frac{t+2}{\sqrt{2}t}\right)^{1-n} \to 0$$

при $t \to 0$.

Далее, утверждение (iii) мы получим, если учтем то обстоятельство, что при $t_2 > t_1$ семейство $\Gamma_{F_1(t_2),F_2(t_2),\mathbb{R}^n_+}$ минорирует семейство $\Gamma_{F_1(t_1),F_2(t_1),\mathbb{R}^n_+}$.

Наконец, для доказательства утверждения (iv) рассмотрим произвольное положительное число ε и допустимую функцию ρ для семейства $\Gamma_{F_1(t_1),F_2(t_1),\mathbb{R}^n_+}$ (по поводу понятия функции, допустимой для семейства путей, см. раздел 2), удовлетворяющую условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)dx < M(A_t) + \varepsilon,$$

и на ее основе построим функцию $\rho^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\rho^*(x) = \rho\left(\frac{t_1}{t_2}x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая неравенство $t_1 < t_2$, не составляет труда проверить, что ρ^* — допустимая функция для семейства $\Gamma_{F_1(t_2),F_2(t_2),\mathbb{R}^n_+}$. Из последнего факта в свою очередь вытекает, что

$$M(A_{t_2}) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho^*(x)]^n dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(y)]^n \frac{t_2}{t_1} dy < \frac{t_2}{t_1}\{M(A_{t_1}) + \varepsilon\}. \tag{8.7}$$

Переходя в (8.7) к пределу при $\varepsilon \to 0$, в итоге получим искомое неравенство (8.5). Лемма 8.2 доказана. □

Следствие 8.1. *Существует число $t_n \in]0, \infty[$ такое, что для каждого $t > t_n$*

$$M(A_t) > M(A_{t_n}). \tag{8.8}$$

Доказательство следствия 8.1 основывается на том обстоятельстве, что в силу леммы 8.2 функция $t \mapsto M(A_t)$, $0 < t < \infty$, непрерывна, непостоянна и возрастает (в широком смысле). Подробности рассуждений мы опускаем.

Замечание 8.3. Число t_n, определяемое следствием 8.1, мы будем называть далее точкой роста функции $t \mapsto M(A_t)$ и для определенности будем полагать, что t_n является наименьшим из чисел $t \geq 1$, удовлетворяющих (8.8) (ясно, что такого рода число также является точкой роста рассматриваемой функции).

Замечание 8.4. Представляется весьма вероятным, что функция $t \mapsto M(A_t)$ строго возрастающая (кстати, этот факт позволил бы в качестве числа t_n принять любое число из интервала $]0, \infty[$, например число 1). Но изучение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы, так как для дальнейшего достаточно располагать следствием 8.1.

Лемма 8.4. *Предположим, что* $0 < t < \infty$,

$$A_t = \{F_1, F_2\} = \{F_1(t), F_2(t)\}$$

— граничный конденсатор полупространства $\mathbb{R}^n_+$*, рассмотренный в формулировке леммы* 8.2*, и*

$$F_j^\tau = \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \operatorname{dist}(x, F_j) \leq \tau,\ x_n \geq 0\}, \quad 0 < \tau < \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2. \tag{8.9}$$

Тогда

$$M(A_t) = \lim_{\tau \searrow 0} M_n(\Gamma(\tau)),$$

где $\Gamma(\tau) = \Gamma_{F_1^\tau, F_2^\tau, \mathbb{R}^n_+ \setminus \{F_1^\tau \cup F_2^\tau\}}$ *— семейство путей, соединяющих* F_1^τ *и* F_2^τ *в* $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{F_1^\tau \cup F_2^\tau\}$.

Доказательство леммы 8.4 осуществляется тем же способом, что и доказательство леммы 3.4 в работе [21], и основывается на следующих n-мерных аналогах лемм 3.1 и 3.2 из [21] (лемма 8.6 представляет собой n-мерный аналог леммы 3.2 из статьи [21] в том частном случае, когда рассматриваемый конденсатор является конденсатором A_t из формулировки леммы 8.2).

Лемма 8.5. *Пусть* $S = \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| |x| = \tau\}$, $\Sigma = S \cap \mathbb{R}^n_+$ *и* ρ *— неотрицательная измеримая по Борелю функция, заданная на* S*. Тогда любые две точки* $P \in \operatorname{cl}\Sigma$ *и* $Q \in \operatorname{cl}\Sigma$ *могут быть соединены дугой* α *некоторой окружности, причем* $\alpha \subset \Sigma$ *и*

$$\left(\int_\alpha \rho dl\right)^n \leq A_n \tau \int_\Sigma \rho^n d\sigma, \tag{8.10}$$

где

$$A_n = \frac{4}{(n-1)v_{n-1}} \left\{ \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}\right)} \right\}^{n-1} \tag{8.11}$$

(в (8.11) Γ *— гамма-функция Эйлера).*

Лемма 8.6. *Если* ρ *— допустимая функция для семейства* $\Gamma_{F_1, F_2, \mathbb{R}^n_+}$*, где* F_1 *и* F_2 *— обкладки конденсатора* A_t *из формулировки леммы* 8.2*, причем*

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\rho^n(x)]^n dx < \infty,$$

то для каждого числа $a > 1$ *существует число* $\tau > 0$*, такое, что функция* $a\rho$ *является допустимой для семейства* $\Gamma(\tau)$.

Доказательства лемм 8.5 и 8.6 почти дословно повторяют доказательства лемм 3.1 и 3.2 в [21] (при этом инъективные пути необходимо заменить произвольными (непрерывными) путями), поэтому мы их опускаем. Остановимся лишь кратко на некоторых моментах, связанных с вычислением постоянной A_n в (8.10).

С этой целью, следуя плану доказательства леммы 3.1 в [21], мы приходим сначала к неравенству

$$\int_\alpha \rho(x) ds \leq \frac{4}{(n-1)v_{n-1}} \int_\Omega \frac{\rho_1(z)}{|z-a|^{n-2}} \frac{d\sigma}{1+|z|^2}, \tag{8.12}$$

представляющему собой n-мерный аналог, $n > 3$, неравенства (3.3) в [21]. Отметим, что в (8.12) Ω — полупространство пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, которое определяется способом, аналогичным способу, избранному в доказательстве леммы 3.1 в [21] для построения соответствующей полуплоскости Ω (пространству $\mathbb{R}^{n-1}$ в доказательстве леммы 3.1 в [21] соответствует плоскость Z). Применяя далее, как и в доказательстве леммы 3.1 в [21], неравенство Гёльдера, мы приходим к следующей оценке:

$$\biggl(\int\limits_{\alpha} \rho(x)ds\biggr)^n \leq \biggl[\frac{4}{(n-1)v_{n-1}}\biggr]^n \biggl\{\int\limits_{\Omega} \frac{d\sigma}{|z-a|^{\frac{n(n-2)}{n-1}}(1+|z|^2)^{\frac{1}{n-1}}}\biggr\}^{n-1} \int\limits_{\Omega} \frac{[\rho_1(z)]^n d\sigma}{(1+|z|^2)^{n-1}}. \tag{8.13}$$

Нам осталось оценить первый из интегралов в правой части неравенства (8.13). Как и в случае соответствующего интеграла из доказательства леммы 3.1 в [21], это можно сделать, используя теорему 7.2 из [22]. Действительно, полагая в условиях последней теоремы $f(z) = |z-a|^{-\frac{n(n-2)}{n-1}}$, $g(z) = (1+|z|^2)^{-\frac{1}{n-1}}$, $f^+(z) = |z|^{-\frac{n(n-2)}{n-1}}$ и $g^+(z) = g(z)$, исчерпывая пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ расширяющейся последовательностью ограниченных областей и используя предельный переход, мы в силу правого из неравенств теоремы 7.2 из [22] получаем следующее:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{d\sigma}{|z-a|^{\frac{n(n-2)}{n-1}}(1+|z|^2)^{\frac{1}{n-1}}} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\sigma}{|z-a|^{\frac{n(n-2)}{n-1}}(1+|z|^2)^{\frac{1}{n-1}}} \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\sigma}{|z|^{\frac{n(n-2)}{n-1}}(1+|z|^2)^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{(n-1)v_{n-1}}{2} \frac{\bigl[\Gamma\bigl(\frac{1}{2(n-1)}\bigr)\bigr]^2}{\Gamma\bigl(\frac{1}{n-1}\bigr)}. \tag{8.14}$$

Оценки (8.13) и (8.14) и соображения из доказательства леммы 3.1 в [21] приводят нас наконец к доказываемому неравенству (8.10).

Замечание 8.5. Постоянная A в неравенстве (3.1) в [21] совпадает с постоянной A_n, определяемой равенством (8.11) нашей работы, в том случае, когда $n = 3$.

Обратимся вновь к доказательству теоремы 8.1. Мы остановились выше на доказательстве конформности отображения $f|_\sigma$. Предполагая, что это отображение не является конформным, мы пришли к следующей ситуации: $s, \tilde{s} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ (s и $\tilde{s}$ — $(n-1)$-мерные грани границ $\operatorname{fr} U_1$ и $\operatorname{fr} U_2$ многогранников $\operatorname{cl} U_1$ и $\operatorname{cl} U_2$, содержащие σ и $\tilde{\sigma} = f(\sigma)$ соответственно); $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n_+$; наконец, существует точка $x_0 \in \sigma$ такая, что

$$|f'(x_0)e_1| = \max_{|e|=1} |f'(x_0)e| > |f'(x_0)e_2| = \min_{|e|=1} |f'(x_0)e|.$$

В силу конформной инвариантности относительных конформных модулей граничных конденсаторов можно полагать также, что $x_0 = f(x_0) = 0$, $B^+_n(0, \sqrt{1+t_n^2})$ $(= B_n(0, \sqrt{1+t_n^2}) \cap \mathbb{R}^n_+)$ $\subset U_1$, $B^+_n(0, \sqrt{1+\Lambda_n^2 t_n^2}) \subset U_2$, где Λ_n — постоянная из (8.4), $f'(0)e_2 = e_2$ и $f'(0)e_1 = ue_1$, $u > 1$ ($u \leq \Lambda_n$). Отправляясь от этой ситуации, рассмотрим параметр $\mu = 2, 3, 4, \ldots$ и граничный конденсатор $\mu^{-1}A_{t_n}$, обкладками которого служат множества $F_j^\mu = \mu^{-1}F_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu x \in F_j\}$, $j = 1, 2$, где F_j — обкладки граничного конденсатора A_{t_n} из формулировки леммы 8.2 и t_n — параметр, определяемый следствием 8.1 и замечанием 8.3, и построим отображение

$$f_\mu : \mu U_1 \to \mu U_2, \tag{8.15}$$

полагая $f_\mu(x) = \mu f(\mu^{-1}x)$, $x \in \mu U_1$. В силу невырожденной дифференцируемости отображения $f|_\sigma$ (и, следовательно, обратного отображения $(f|_\sigma)^{-1}$) в точке 0

$$f_\mu(x) = Lx + |x|\alpha(\mu^{-1}x), \quad x \in \mu U_1, \tag{8.16}$$

и

$$f_\mu^{-1}(x) \ (= \mu f^{-1}(\mu^{-1}x)) \ = L^{-1}x + |x|\beta(\mu^{-1}x), \ x \in \mu U_2. \tag{8.17}$$

Отметим, что в (8.16) и (8.17) $L = f'(0)$ — производная (дифференциал) отображения f в точке 0,

$$L\biggl(\frac{\tau e_1 \pm e_2}{2}\biggr) = \frac{u\tau e_1 \pm e_2}{2}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{8.18}$$

и
$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0,\quad \lim_{x\to 0}\beta(x)=0, \tag{8.19}$$
причем отображения α и β от параметра μ не зависят.

Рассмотрим теперь граничный конденсатор $f_\mu^{-1}(A_{ut_n})$ полупространства $\mathbb{R}^n_+$, обкладками которого служат множества $f_\mu^{-1}(F_j(ut_n))$, $j=1,2$ (множества $f_\mu^{-1}(F_j(ut_n))$ определены корректно, так как $B_n^+(0,\sqrt{1+\Lambda_n^2t_n^2})\subset U_2$). Из того факта, что
$$\Gamma_{f_\mu^{-1}(F_1(ut_n)),f_\mu^{-1}(F_2(ut_n)),\mu U_1}\subset\Gamma_{f_\mu^{-1}(F_1(ut_n)),f_\mu^{-1}(F_2(ut_n),\mathbb{R}^n_+},$$
и теоремы 6.2 монографии [23] вытекают соотношения
$$M^{\mu U_1}(f^{-1}(A_{ut_n}))=M_n(\Gamma_{f_\mu^{-1}(F_1(ut_n)),f_\mu^{-1}(F_2(ut_n)),\mu U_1})\le M^{\mathbb{R}^n_+}(f_\mu^{-1}(A_{ut_n})). \tag{8.20}$$
С другой стороны, соотношение
$$\Gamma_{F_1(ut_n),F_2(ut_n),\mathbb{R}^n_+}\subset\Gamma_{F_1(ut_n),F_2(ut_n),\mu U_2}\cup\Gamma^*(F_1(ut_n),F_2(ut_n),\mu U_2),$$
где $\Gamma^*(F_1(ut_n),F_2(ut_n),\mu U_2)=\Gamma^*_\mu$ состоит из тех путей γ семейства $\Gamma_{F_1(ut_n),F_2(ut_n),\mathbb{R}^n_+}$, образы $\operatorname{Im}\gamma$ которых имеют общие точки с множеством $\mathbb{R}^n_+\setminus\mu U_2$, в силу той же теоремы 6.2 из [23] позволяет заключить, что
$$M^{\mathbb{R}^n_+}(A_{ut_n})\le M^{\mu U_2}(A_{ut_n})+M_n(\Gamma^*_\mu)=M_n(\Gamma_{F_1(ut_n),F_2(ut_n),\mu U_2})+M_n(\Gamma^*_\mu). \tag{8.21}$$
В свою очередь из соотношения $B_n^+(0,\sqrt{1+\Lambda_n^2t_n^2})\subset U_2$ вытекает, что семейство Γ^*_μ минорируется семейством Γ^{**}_μ всех путей, соединяющих в сферическом кольце $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sqrt{1+\Lambda_n^2t_n^2}<|x|<\mu\sqrt{1+\Lambda_n^2t_n^2}\}$ его граничные сферы, причем n-модуль семейства Γ^{**}_μ равен числу $nv_n/(\ln\mu)^{n-1}$ (см. теорему 7.5 в [23]). Следовательно, это обстоятельство и теорема 6.4 монографии [23] приводят нас к оценке
$$M_n(\Gamma^*_\mu)\le\frac{nv_n}{(\ln\mu)^{n-1}}.$$
Учитывая еще (8.20) и (8.21) и тот факт, что f_μ (вместе с f) сохраняет относительные конформные модули граничных конденсаторов, мы приходим к неравенствам
$$M^{\mathbb{R}^n_+}(A_{ut_n})-\frac{nv_n}{(\ln\mu)^{n-1}}\le M^{\mu U_2}(A_{ut_n})=M^{\mu U_1}(f^{-1}(A_{ut_n}))\le M^{\mathbb{R}^n_+}(f_\mu^{-1}(A_{ut_n})). \tag{8.22}$$

Оценим теперь подходящим образом величину $M^{\mathbb{R}^n_+}(f_\mu^{-1}(A_{ut_n}))$ сверху. С этой целью заметим прежде всего, что соотношения (8.17)–(8.19) влекут следующие неравенства:
$$\left|f_\mu^{-1}\left(\frac{\tau e_1\pm e_2}{2}\right)-\frac{u^{-1}\tau e_1\pm e_2}{2}\right|\le\frac{\sqrt{1+\Lambda_n^2t_n^2}}{2}\left\{\sup_{|y|\le\frac{\sqrt{1+\Lambda_n^2t_n^2}}{2\mu}}|\beta(y)|\right\}=\beta^*_\mu\to 0 \tag{8.23}$$
при $\mu\to\infty$, $|\tau|\le ut_n$ (мы будем далее полагать μ столь большим, что $\beta^*_\mu<\frac12$). Из неравенств (8.23) в свою очередь следует, что
$$f_\mu^{-1}(F_j(ut_n))\subset F_j^{\beta^*_\mu}(t_n),\quad j=1,2, \tag{8.24}$$
где множество $F_j^{\beta^*_\mu}$ совпадает с F_j^τ в соотношениях (8.9), если $\tau=\beta^*_\mu$. Учитывая (8.24), мы легко приходим к заключению о том, что
$$M^{\mathbb{R}^n_+}(f_\mu^{-1}(A_{ut_n}))\le M_n\big(\Gamma\big(\beta^*_\mu\big)\big), \tag{8.25}$$
где $\Gamma(\tau)$ — семейство путей из формулировки леммы 8.4 (при доказательстве неравенства (8.25) используются теорема 6.4 из [23] и то обстоятельство, что в силу (8.24) семейство $\Gamma\big(\beta^*_\mu\big)$ минорирует семейство $\Gamma_{f_\mu^{-1}(F_1(ut_n)),f_\mu^{-1}(F_2(ut_n)),\mathbb{R}^n_+}$).

Наконец, объединяя сначала неравенства (8.22) и (8.25), мы приходим к неравенствам
$$M^{\mathbb{R}^n_+}(A_{ut_n})-\frac{nv_n}{(\ln\mu)^{n-1}}\le M_n\big(\Gamma\big(\beta^*_\mu\big)\big), \tag{8.26}$$
а затем устремляя μ к ∞ и применяя к правой части в (8.26) лемму 8.4, мы заключаем, что
$$M^{\mathbb{R}^n_+}(A_{ut_n})\le M^{\mathbb{R}^n_+}(A_{t_n}).$$

Но последнее неравенство противоречит тому, что $u > 1$ и t_n — точка роста функции $t \mapsto M(A_{t_n})$, $0 < t < \infty$. Следовательно, доказательство конформности отображения $f|_\sigma$ завершено.

Отметим, что так как f^{-1} также сохраняет относительные конформные модули граничных конденсаторов, то конформным является и отображение $f^{-1}|_{\tilde{\sigma}}$.

Следующий этап доказательства теоремы состоит в установлении равенства $T^2_{n-2} = f\big(T^1_{n-2}\big)$. Для этого достаточно доказать, что каждая компонента связности σ множества Σ_1 (по поводу определений множеств T^j_{n-2} и Σ_j, $j = 1, 2$, см. начало доказательства теоремы) совпадает с той $(n-1)$-мерной гранью s многогранника $\operatorname{cl} U_1$, которая содержит σ, так как обращение к отображению f^{-1} позволит установить и равенство $\tilde{\sigma}\,(= f(\sigma)) = \tilde{s}$.

Предполагая, что $s \setminus \operatorname{cl}\sigma \neq \varnothing$, рассмотрим точку $x_0 \in \{\operatorname{fr}_s \sigma \cap \operatorname{int} s\}$. Образ $y_0 = f(x_0)$ этой точки принадлежит множеству $\partial\tilde{s}$, причем в силу непрерывности отображения f^{-1} существует n-мерный шар $B(y_0, r)$ такой, что $f^{-1}(B(y_0, r) \cap \partial\tilde{s}) \subset \{\operatorname{fr}_s \sigma \cap \operatorname{int} s\}$. В множестве $B(y_0, r) \cap \partial\tilde{s}$ найдется точка y_0^*, принадлежащая внутренности $\operatorname{int} v$ некоторой $(n-1)$-мерной грани v многогранника $\operatorname{cl} U_2$. Пусть $x_0^* = f^{-1}(y_0^*)$. Мы будем полагать далее, что x_0^* — это и есть первоначально выбранная точка x_0, причем $x_0 = f(x_0) = 0$; $s, \tilde{s} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| x_n = 0\}$; $U_j \subset \mathbb{R}^n_+$, $j = 1, 2$, и $v \subset \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| x_{n-1} = x_n = 0\}$. Кроме того, так как из условия $n \geq 4$ и хорошо известных свойств прстранственных конформных отображений следует, что отображение $f|_\sigma$ $(f^{-1}|_{\tilde{\sigma}})$ является сужением на σ $(\tilde{\sigma})$ некоторого мёбиусова отображения $h : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ $(f^{-1}|_{\tilde{\sigma}} = h^{-1}|_{\tilde{\sigma}})$, то можно считать также, что $\tilde{\sigma} = \sigma$ и $f|_\sigma = \operatorname{Id}\sigma$.

Рассмотрим области:

$$V_\alpha = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \bigm| x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-2,$$
$$x_{n-1} = r\cos\theta, \quad x_n = r\sin\theta, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \alpha\},$$

$0 < \alpha \leq 2\pi$. Для этих областей имеет место следующий n-мерный аналог, $n \geq 4$, леммы 7.1 из статьи [21].

Лемма 8.7. *Пусть* $0 < \alpha \leq 2\pi$,

$$F_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| -1 \leq x_1 \leq 0, \quad x_j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n\},$$
$$F_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| 1 \leq x_1 \leq \infty, \quad x_j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n\}$$

$(n \geq 4)$. *Если* Γ_α — *семейство всех путей, соединяющих* F_1 *и* F_2 *в* V_α, *то*

$$M^{V_\alpha}(A) = M_n(\Gamma_\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} M_n(\Gamma_\pi) = \frac{\alpha}{\pi} M^{V_\pi}(A),$$

где $A = \{F_1, F_2\}$ — *граничный конденсатор области* V_α *с обкладками* F_1 *и* F_2.

Заметим, что $0 < M^{V_\alpha}(A) < \infty$, $\alpha \in \,]0, 2\pi]$. Действительно, так как $\Gamma_{F_1, F_2, V_\alpha} \subset \Gamma_{F_1, F_2, \mathbb{R}^n \setminus \{F_1 \cup F_2\}}$, то из теоремы 6.2 из [23] следует, что $M^{V_\alpha}(A) \leq M_n(\Gamma_{F_1, F_2, \mathbb{R}^n \setminus \{F_1 \cup F_2\}}) < \infty$. С другой стороны, в силу леммы 8.1 $M^{V_\pi}(A) = M^{\mathbb{R}^n_+}(A) \geq \lambda_n$, где λ_n — постоянная из (8.2).

Доказательство леммы 8.7 состоит в почти дословном перенесении рассуждений из доказательства леммы 7.1 в [21] на рассматриваемый в лемме 8.7 n-мерный случай, $n \geq 4$ (с заменой при этом инъективных путей на произвольные (непрерывные) пути). По этой причине мы его опускаем.

Нам потребуются далее также два несложные наблюдения, доказательства которых мы предоставляем читателю.

1^0. Если три $(n-1)$-мерные грани границы $\operatorname{fr} U_j$ многогранника $\operatorname{cl} U_j$, $j = 1, 2$, имеют общую точку, то тогда множество точек их пересечения является гранью размерности $\geq n - 3$.

2^0. Если две грани s_1 и s_2 границы $\operatorname{fr} U_j$ многогранника $\operatorname{fr} U_j$ связаны соотношением $s_1 \subset s_2$, причем грань s_1 имеет меньшую в сравнении с s_2 размерность, то $s_1 \subset \partial s_2$.

Продолжая доказательство равенства $\sigma = s$, рассмотрим число $r_0 > 0$, удовлетворяющее условиям $\{B(0, r_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| x_{n-1} = x_n = 0\}\} \subset v$, $\{B(0, r_0) \cap V_\pi\} \subset U_1$ и $\{B(0, r_0) \cap V_\alpha\} \subset U_2$, где α — угол между гранью $\tilde{s}$ и той соседней с ней $(n-1)$-мерной гранью границы многогранника $\operatorname{cl} U_2$, которая обладает общей с $\tilde{s}$ $(n-2)$-мерной гранью v. В этой связи следует отметить, во-первых, что угол α, $0 < \alpha < \pi$, между $(n-1)$-мерными гранями s^1 и s^2, $s^1 \neq s^2$, границы $\operatorname{fr} U_j$ многогранника $\operatorname{cl} U_j$, такими, что $s^1 \cap s^2$ — ее $(n-2)$-мерная грань, мы определяем следующим образом. Пусть точка $x_0 \in \operatorname{int}(s^1 \cap s^2)$. Тогда α — это наименьший положительный угол между векторами ζ^1

и ζ^2, $|\zeta^1| = |\zeta^2| = 1$, принадлежащими касательным (относительно $\mathbb{R}^n$) пространствам в точке x_0 граней s^1 и s^2 соответственно и ортогональными касательному пространству грани $s^1 \cap s^2$ в этой же точке. Заметим, что наше определение угла между s^1 и s^2 корректно, так как оно не зависит от выбора точки $x_0 \in \operatorname{int}(s^1 \cap s^2)$. И во-вторых, из утверждений 1^0 и 2^0, в частности, вытекает, что если s — $(n-1)$-мерная грань границы $\operatorname{fr} U_j$ многогранника $\operatorname{cl} U_j$ и w — $(n-2)$-мерная грань грани s, то тогда существует еще одна, причем единственная $(n-1)$-мерная грань s_0 границы $\operatorname{fr} U_j$, такая, что $s_0 \cap s = w$. Полагая далее $r_0 = 2$ (что возможно в силу конформной инвариантности относительных конформных модулей граничных конденсаторов) и действуя по аналогии с нашими рассуждениями в ходе доказательства конформности отображения $f|_\sigma$, построим последовательность $\{f_\mu\}_{\mu=2,3,\dots}$ отображений $f_\mu : \mu U_1 \to \mu U_2$, используя соотношение (8.15). Очевидно, что отображение f_μ обладает следующими свойствами:

$$\{B(0,2\mu) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{n-1} = x_n = 0\}\} \subset \mu v, \tag{8.27}$$

$$\{B(0,2\mu) \cap V_\pi\} \subset \mu U_1, \tag{8.28}$$

$$\{B(0,2\mu) \cap V_\alpha\} \subset \mu U_2, \tag{8.29}$$

$$f_\mu|_{\mu\sigma} = \operatorname{Id}(\mu\sigma). \tag{8.30}$$

Отправляясь от отображения f_μ и учитывая соотношения (8.27)–(8.30), рассмотрим граничный конденсатор A_μ области U_j, $j = 1, 2$, обкладками которого служат множества

$$F_1^\mu = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \le x_1 \le 0, \quad x_j = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n\},$$

$$F_2^\mu = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \le x_1 \le \mu, \quad x_j = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n\}.$$

В силу того, что f_μ (вместе с f) сохраняет относительные конформные модули граничных конденсаторов, справедливо равенство

$$M^{\mu U_1}(A_\mu) = M^{\mu U_2}(A_\mu). \tag{8.31}$$

Помимо того, из (8.27)–(8.30) следует также, что

$$\Gamma_{F_1, F_2, V_\pi} \subset \Gamma_{F_1^\mu, F_2^\mu, V_\pi} \cup \Gamma_{F_1^\mu, F_2^{\mu *}, \mathbb{R}^n \setminus \{F_1^\mu \cup F_2^{\mu *}\}}$$

и

$$\Gamma_{F_1^\mu, F_2^\mu, V_\pi} \subset \Gamma_{F_1^\mu, F_2^\mu, \mu U_1} \cup \Gamma_\mu,$$

где F_1 и F_2 — множества из формулировки леммы 8.7,

$$F_2^{\mu *} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu \le x_1 \le \infty, \quad x_j = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n\},$$

$\Gamma_{F_1^\mu, F_2^{\mu *}, \mathbb{R}^n \setminus \{F_1^\mu \cup F_2^{\mu *}\}}$ — семейство путей в $\mathbb{R}^n$, соединяющих F_1^μ и $F_2^{\mu *}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{F_1^\mu \cup F_2^{\mu *}\}$, и Γ_μ — семейство путей γ, соединяющих F_1 и F_2 в $\mathbb{R}^n \setminus \{F_1 \cup F_2\}$ и таких, что $\operatorname{Im}\gamma \cap \{\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2\mu)\} \ne \varnothing$. Тем самым в силу теоремы 6.2 из [23]

$$M^{V_\pi}(A) \le M^{V_\pi}(A_\mu) + M_n(A_\mu^*, \mathbb{R}^n) \le M^{\mu U_1}(A_\mu) + M_n(\Gamma_\mu) + M_n(A_\mu^*, \mathbb{R}^n), \tag{8.32}$$

где A — граничный конденсатор области V_α, определенный в формулировке леммы 8.7, и A_μ^* — конденсатор в пространстве $\mathbb{R}^n$, обкладками которого являются множества F_1^μ и $F_2^{\mu *}$, и

$$M_n(A_\mu^*, \mathbb{R}^n) = M_n(\Gamma_{F_1^\mu, F_2^{\mu *}, \mathbb{R}^n \setminus \{F_1^\mu \cup F_2^{\mu *}\}}).$$

Принимая во внимание еще то, что семейства $\Gamma_{F_1^\mu, F_2^{\mu *}, \mathbb{R}^n \setminus \{F_1^\mu \cup F_2^{\mu *}\}}$ и Γ_μ минорируются семействами $\Gamma_{S_1, S_2', A_\mu'}$ и $\Gamma_{S_1, S_2'', A_\mu''}$ путей, соединяющих в сферическом кольце $A_\mu' = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \frac{1}{2} < \bigl|x + \frac{e_1}{2}\bigr| < \mu + \frac{1}{2}\bigr\}$ его граничные сферы $S_1 = S_{n-1}\bigl(-\frac{e_1}{2}, \frac{1}{2}\bigr)$ и $S_2' = S_{n-1}\bigl(-\frac{e_1}{2}, \mu + \frac{1}{2}\bigr)$ и, соответственно, в сферическом кольце $A_\mu'' = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \frac{1}{2} < |x + \frac{e_1}{2}| < 2\mu + \frac{1}{2}\bigr\}$ граничные сферы S_1 и $S_2'' = S_{n-1}\bigl(-\frac{e_1}{2}, 2\mu + \frac{1}{2}\bigr)$ последнего, мы в силу теорем 6.2, 6.4 и 7.5 из [23] приходим к соотношениям

$$M_n(A_\mu^*, \mathbb{R}^n) \le n v_n \{\ln(2\mu + 1)\}^{1-n} \tag{8.33}$$

и

$$M_n(\Gamma_\mu) \le n v_n \{\ln(4\mu + 1)\}^{1-n} < n v_n \{\ln(2\mu + 1)\}^{1-n}. \tag{8.34}$$

Неравенства (8.32)–(8.34) приводят нас в свою очередь к такому неравенству:

$$M^{V_\pi}(A) - 2 n v_n \{\ln(2\mu + 1)\}^{1-n} \le M^{\mu U_1}(A_\mu). \tag{8.35}$$

С другой стороны, так как $\Gamma_{F_1^\mu,F_2^\mu,\mu U_1} \subset \Gamma_{F_1^\mu,F_2^\mu,V_\pi}$, а семейство Γ_{F_1,F_2,V_π} минорирует семейство $\Gamma_{F_1^\mu,F_2^\mu,V_\pi}$, то снова применяя теоремы 6.2 и 6.4 из [23], мы получаем соотношения

$$M^{\mu U_1}(A_\mu) \le M^{V_\pi}(A_\mu) \le M^{V_\pi}(A) \tag{8.36}$$

Объединяя соотношения (8.35) и (8.36), мы устанавливаем, наконец, что

$$M^{V_\pi}(A) - 2nv_n\{\ln(2\mu+1)\}^{1-n} \le M^{\mu U_1}(A_\mu) \le M^{V_\pi}(A),$$

откуда в свою очередь следует равенство

$$\lim_{\mu\to\infty} M^{\mu U_1}(A_\mu) = M^{V_\pi}(A). \tag{8.37}$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить также неравенства

$$M^{V_\alpha}(A) - 2nv_n\{\ln(2\mu+1)\}^{1-n} \le M^{\mu U_2}(A_\mu) \le M^{V_\alpha}(A),$$

в силу которых

$$\lim_{\mu\to\infty} M^{\mu U_2}(A_\mu) = M^{V_\alpha}(A). \tag{8.38}$$

Принимая во внимание еще равенства (8.31) и (8.37), мы заключаем в силу (8.38), что

$$M^{V_\alpha}(A) = M^{V_\pi}(A).$$

В то же время из леммы 8.7 и неравенства $0 < \alpha < \pi$ вытекает следующее неравенство:

$$(0 <)\ M^{V_\alpha}(A) < M^{V_\pi}(A).$$

Полученное противоречие означает, что доказываемое равенство $\sigma = s$ установлено.

Вступая в завершающую стадию доказательства теоремы, заметим прежде всего, что в силу выпуклости множеств U_j, $j = 1, 2$, каждая грань любой размерности их границ также выпуклое множество, причем из конформности отображения $f|_\sigma$, неравенства $n \ge 4$ и равенства $\sigma = s$, где σ и s те же, что и выше, непосредственно вытекает следующее: если u — грань границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$, то тогда $f(u)$ является гранью той же размерности границы $\operatorname{fr} U_2$ многогранника $\operatorname{cl} U_2$. Пусть теперь s_1 и s_2 — $(n-1)$-мерные грани границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$, такие, что множество $s_1 \cap s_2 = v$ — $(n-2)$-мерная грань этой границы. Повторяя почти дословно рассуждения, использованные выше для доказательства равенства $\sigma = s$, и применяя при этом еще раз лемму 8.7, мы без труда установим, что угол между $(n-1)$-мерными гранями $f(s_1)$ и $f(s_2)$ границы $\operatorname{fr} U_2$ многогранника $\operatorname{cl} U_2$ равен углу между гранями s_1 и s_2.

Выберем далее любую $(n-1)$-мерную грань s_1 границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$. Как и выше, можно полагать, что $s_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$, $f|_{s_1} = \operatorname{Id} s_1$ и $U_j \subset \mathbb{R}^n_+$, $j = 1, 2$. Пусть s_2 — такая $(n-1)$-мерная грань границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$, что множество $s_1 \cap s_2 = w$ — $(n-2)$-мерная ее грань. Мы утверждаем, что $f(s_2) = s_2$. Действительно, так как $f|_{\operatorname{int} s_1}$ — конформное отображение $(n-1)$-мерной области $\operatorname{int} s_2$ на $(n-1)$-мерную область $f(\operatorname{int} s_2)$, то из условия $n \ge 4$ и свойств пространственных конформных отображений следует, что $f|_{s_2} = h|_{s_2}$, где $h : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ — отображение Мёбиуса, которое в силу условия $f|_w = \operatorname{Id} w$ является изометрическим отображением пространства $\bar{\mathbb{R}}^n$. Равенство $f(s_2) = s_2$ вытекает теперь из того, что угол между гранями $f(s_1)$ и $f(s_2)$ границы $\operatorname{fr} U_2$ многогранника $\operatorname{cl} U_2$ равен углу между гранями s_1 и s_2 границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$.

На следующем шаге рассмотрим еще одну $(n-1)$-мерную грань s_3 границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$, которая пересекается с одной из граней s_1 и s_2 по некоторой ее $(n-2)$-мерной грани w_2. Если $w_2 = s_1 \cap s_3$, то $f(s_3) = s_3$ в силу только что доказанного. А если $w_2 = s_2 \cap s_3$, то, во-первых, предыдущие рассуждения приводят к заключению об изометричности отображения $f|_{s_3}$. И во-вторых, так как кроме того $s_2 \cap f(s_3) = w_2$ и угол α между гранями s_2 и s_3 границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$ $(0 < \alpha < \pi)$ равен углу между гранями $f(s_2) = s_2$ и $f(s_3)$ границы $\operatorname{fr} U_2$ многогранника $\operatorname{cl} U_2$, то для расположения грани $f(s_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ есть две возможности: либо $f(s_3) = s_3$, либо $\operatorname{int} f(s_3)$ и $\operatorname{int} s_1$ лежат по разные стороны несущей гиперплоскости грани s_2. Вторая возможность исключается в силу выпуклости U_j, $j = 1, 2$. Следовательно, $f(s_3) = s_3$.

Продолжая наши рассуждения по индукции, на ν-м шаге мы окажемся в следующей ситуации. Существуют $(n-1)$-мерные грани $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ границы $\operatorname{fr} U_1$ многогранника $\operatorname{cl} U_1$, такие, что $s_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$; для каждой грани s_j, $j = 2, 3, \ldots, \nu$, найдется грань s_k, $k < j$, удовлетворяющая условию: $s_j \cap s_k$ — $(n-2)$-мерная грань этой границы; наконец, $f|_{G_\nu} = \mathrm{Id}\, G_\nu$, где $G_\nu = \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} s_j$. Если при этом $G = \mathrm{fr}\, U_1$, то $U_1 = U_2$ и тем самым доказательство теоремы завершено. Если же $\mathrm{fr}\, U_1 \setminus G \neq \varnothing$, то продолжим наши рассуждения следующим образом.

Так как дополнение до $\mathrm{fr}\, U_1$ объединения любого набора граней размерностей, меньших $n-2$, границы $\mathrm{fr}\, U_1$ многогранника $\mathrm{cl}\, U_1$ связно, то существует ее $(n-2)$-мерная грань w, такая, что $w \in \mathrm{fr}_{\mathrm{fr}\, U_1} G$. Рассмотрим точку $x_0 \in \mathrm{int}\, w$, те две $(n-1)$-мерные грани $\tilde{s}_1$ и $\tilde{s}_2$ границы $\mathrm{fr}\, U_1$, для которых выполняется соотношение $w = \tilde{s}_1 \cap \tilde{s}_2$, и шар $B(x_0, r)$, не имеющий общих точек с остальными $(n-1)$-мерными гранями границы $\mathrm{fr}\, U_1$. В силу способа построения множества G и того факта, что $x_0 \in \mathrm{fr}_{\mathrm{fr}\, U_1} G$, одно из множеств $B(x_0,r) \cap \mathrm{int}\, \tilde{s}_1$ и $B(x_0,r) \cap \mathrm{int}\, \tilde{s}_2$ (и, следовательно, одно из множеств $\mathrm{int}\, \tilde{s}_1$ и $\mathrm{int}\, \tilde{s}_2$), скажем, первое из них, должно быть подмножеством множества G, а другое — множества $\mathrm{fr}\, U_1 \setminus G$. Если $\tilde{s}_1$ есть начальная грань s_1, то принимая в качестве s_2 грань $\tilde{s}_2$, мы в силу уже доказанного имеем равенство $f(\tilde{s}_2) = \tilde{s}_2$. А если $\tilde{s}_1 \neq s_1$, то принимая за s_1 ту из $(n-1)$-мерных граней границы $\mathrm{fr}\, U_1$ многогранника $\mathrm{cl}\, U_1$, участвующих в построении множества G, которая пересекается с $\tilde{s}_1$ по $(n-2)$-мерной грани, за s_2 — грань $\tilde{s}_1$ и, наконец, за s_3 — грань $\tilde{s}_2$, мы оказываемся в рассмотренной выше ситуации. И, следовательно, снова заключаем, что $f(\tilde{s}_2) = \tilde{s}_2$. Таким образом, мы смогли сделать $(\nu+1)$-й шаг в наших рассуждениях. Продолжая их, мы в конце концов установим равенство $\mathrm{fr}\, U_1 = \mathrm{fr}\, U_2$, из которого следует, что область U_1 однозначно определяется относительными конформными модулями своих граничных конденсаторов в классе $\mathcal{P}$.

Для полного завершения доказательства теоремы нам остается заметить, что если $F : U_1 \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ — конформное отображение области $U_1 \in \mathcal{P}$ в пространство $\mathbb{R}^n$, не являющееся ограничением на U_1 преобразования подобия, то образ $\tilde{F}(s)$ хотя бы одной $(n-1)$-мерной грани s границы $\mathrm{fr}\, U_1$ при конформном отображении $\tilde{F} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$, таком, что $F = \tilde{F}|_{U_1}$, представляет собой подмножество некоторой сферы $S_{n-1}(x,r)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$. Последнее же невозможно, если $F(U_1) \in \mathcal{P}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
2. *Александров В. А.* Изометричность областей в $\mathbb{R}^n$ и относительная изометричность их границ// Сиб. мат. ж. — 1984. — *25*, № 3. — С. 3–13.
3. *Александров В. А.* Изометричность областей в $\mathbb{R}^n$ и относительная изометричность их границ, II// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*, № 6. — С. 3–8.
4. *Александров В. А.* Об областях, однозначно определяемых относительной метрикой своей границы// Исследования по геометрии и математическому анализу/ Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд. — 1987. — *7*. — С. 5–19.
5. *Александров В. А.* Однозначная определенность областей с нежордановыми границами// Сиб. мат. ж. — 1989. — *30*, № 1. — С. 3–12.
6. *Александров В. А.* Оценка деформации строго выпуклой области в зависимости от изменения относительной метрики ее границы// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, № 5. — С. 3–9.
7. *Александров В. А.* Об изометричности многогранных областей, границы которых локально изометричны в относительных метриках// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 2. — С. 3–9.
8. *Боровикова М. К.* Об изометричности многоугольных областей, границы которых локально изометричны в относительных метриках// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 4. — С. 30–41.
9. *Волков Ю. А.* Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики// Укр. геом. сб. — Харьков: Изд-во ХГУ, 1968. — *5/6*. — С. 44–69.
10. *Копылов А. П.* О граничных значениях отображений, близких к изометрическим// Сиб. мат. ж. — 1984. — *25*, № 3. — С. 120–131.
11. *Кузьминых А. В.* Об изометричности областей, границы которых изометричны в относительных метриках// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*, № 3. — С. 91–99.
12. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.
13. *Погорелов А. В.* Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. — Изд. АН УССР, 1951.
14. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982.
15. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 1996.

16. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ., 1949.
17. *Сенькин Е. П.* Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей// Укр. геом. сб. — Харьков: Изд-во ХГУ, 1972. — *12*. — С. 131–152.
18. *Троценко Д. А.* Однозначная определенность ограниченных областей метрикой границы, индуцированной метрикой области// Всесоюз. конф. по геометрии «в целом», Новосибирск, 1987/ Тез. докл. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987. — С. 122.
19. *Уитни Х.* Геометрическая теория интегрирования. — М.: ИЛ, 1960.
20. *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. — М: Мир, 1972.
21. *Gehring F. W., Väisälä J.* The coefficients of quasiconformality of domains in space// Acta Math. — 1965. — *114*, № 1-2. — С. 1–70.
22. *Pólya G., Szegö G.* Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics/ Ann. Math. Stud. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1951. — *27*.
23. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1971.
24. *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space// Ann. Acad. Sci. Fenn. A I. — 1961. — *298*. — С. 1–36.

А. П. Копылов
Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: `kopylov@math.nsc.ru`