ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

**Е.М. ВАРФОЛОМЕЕВ,
Л.Е. РОССОВСКИЙ**

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И ПЕРЕДАЧЕ ИНФОРМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЛАЗЕРНЫМИ СИСТЕМАМИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Учебное пособие

**Москва
2008**

Р е ц е н з е н т:
Доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Власов*

Инновационная образовательная программа
Российского университета дружбы народов

«Создание комплекса инновационных образовательных программ и формирование инновационной образовательной среды, позволяющих эффективно реализовывать государственные интересы РФ через систему экспорта образовательных услуг»

Варфоломеев Е.М., Россовский Л.Е.
Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения к исследованию нейронных сетей и передаче информации нелинейными лазерными системами с обратной связью. – М., 2008. – 243 с.

В учебном пособии изучаются квазилинейные и линейные параболические и эллиптические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие преобразования пространственных переменных неизвестной функции в ограниченной пространственной области. Излагаются актуальные вопросы, возникающие в приложениях. Курс носит теоретический характер и рекомендуется для магистров физико-математических факультетов вузов и университетов, обучающихся по направлению «Математика».

Учебное пособие выполнено в рамках инновационной образовательной программы Российского университета дружбы народов, направление «Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях», и входит в состав учебно-методического комплекса, включающего описание курса, программу и электронный учебник.

Оглавление

Введение

Целью настоящего учебного пособия является изучение свойств квазилинейных и линейных параболических и эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих преобразования пространственных переменных неизвестной функции в ограниченной пространственной области.

В первых двух разделах пособия изучаются квазилинейные параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие конечное число преобразований пространственных переменных в младших членах, а также соответствующие линеаризованные эллиптические и параболические функционально-дифференциальные операторы.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие отклонения по переменной времени, рассматривались в ряде работ, см. [40, 46, 47, 55, 57]. Наиболее общий случай таких уравнений с переменными запаздываниями в старших производных исследовался в работах В. В. Власова [8, 9].

Краевые задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами по пространственным переменным изучались в работах А. Л. Скубачевского, Р. В. Шамина и А. М. Селицкого [25, 30, 35, 52].

В пособии рассматриваются параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие произвольные преобразования пространственных переменных. Такие задачи имеют приложения в нелинейной оптике.

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают различные регулярные периодические явления, которые называют “многолепестковыми волнами” [11, 56]. Эти явления могут использоваться для оптических методов передачи, обработки и хранения информации.

Математической моделью некоторого класса таких оптических систем является вторая смешанная задача для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием пространственных переменных:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K\big(1+\gamma\cos(u(g(x),t))\big), \\ &\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial Q\times\mathbb{R}} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $u(x,t)$ — фазовая модуляция световой волны, $D > 0$, K, γ — некоторые постоянные величины, g — преобразование пространственных переменных, $\widetilde{\nu} = (\nu, 0)$, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q. Возникновение "многолепестковых волн" происходит в результате бифуркации периодических решений задачи (1) в окрестности пространственно-однородного стационарного решения $w = \mathrm{const}$, определяемого соотношением $w = K(1+\gamma\cos w)$.

Задача (1) изучалась в целом ряде работ. А. В. Разгулиным [19], а также А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым [13] рассматривалась одномерная модель на окружности, в которой преобразование пространственных переменных g являлось поворотом на некоторый угол. В работе [34] В. А. Чушкина и А. В. Разгулина была решена задача на отрезке, где преобразование g являлось отражением пространственной переменной относительно центра отрезка. А. В. Разгулиным [50] был исследован случай, когда пространственная область Q — круг, а преобразование g — поворот на некоторый постоянный угол. В работе Е. П. Белана [2] рассматривался случай, когда область Q — круг, а преобразование g является суперпозицией преобразований поворота и радиального сжатия. Случай произвольной области Q с гладкой границей и невырожденного взаимно однозначного преобразования $g \in C^3$ общего вида изучался А. Л. Скубачевским [26, 54] в предположении, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор задачи (1) является нормальным. Кроме того, А. Л. Скубачевским [27] были получены необходимые и достаточные условия нормальности таких операторов. Без предположения нормальности оператора L для произвольной области Q с гладкой границей и достаточно гладкого невырожденного взаимно однозначного преобразования g общего вида А. Л. Скубачевским [28] было доказано существование бифуркации периодических решений задачи (1) методами исследования бифуркации Андронова—Хопфа в бесконечномерном случае [38,39]. Е. П. Беланом [1] при таких же предположениях об операторе L, области Q и преобразовании g методом центральных многообразий были получены условия существования и устойчивости бифуркационных решений задачи (1), а также формулы для определения их топологических свойств. В работе А. В. Разгулина [20] была изучена задача управления преобразованием пространственных переменных g в случае, когда Q — произвольная область с гладкой границей, а преобразование g задано в обобщенном виде с помощью некоторого функционала и, вообще говоря, не является обратимым.

В настоящем пособии рассматривается обобщение задачи (1) на случай конечного числа произвольных достаточно гладких невырожденных взаимно однозначных преобразований пространственных переменных, а также исследуется нормальность линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора такой задачи и разрешимость первой и второй смешанных задач для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений.

В первом разделе изучаются линейные параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие конечное число преобразований пространственных переменных в младших членах, а также соответствующие линеаризованные эллиптические и параболические функционально-дифференциальные операторы.

Ключевую роль играет свойство нормальности линейных эллиптических функционально-дифференциальных операторов. Поэтому для целостности изложения в теме 1 даются некоторые известные факты из спектральной теории нормальных операторов, включающие спектральную теорему. Эти факты используются затем в темах 3, 5 и 6.

В теме 2 рассматриваются линейные эллиптические функционально-дифференциальные операторы, содержащие произвольные преобразования пространственных переменных в младших членах. Доказывается, что при определенных условиях такой оператор является нормальным тогда и только тогда, когда преобразования пространственных переменных являются коммутирующими ортогональными преобразованиями. Данные условия нормальности используются в темах 3 и 5.

В теме 3 методом Фурье решаются первая и вторая смешанные задачи для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных, удовлетворяющими условиям нормальности операторов, полученным в теме 2.

Во втором разделе рассматриваются квазилинейные параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованиями пространственных переменных в младших членах. Изучается бифуркация Андронова—Хопфа их периодических решений. Такая постановка задачи имеет приложения в нелинейной оптике.

В теме 4 для целостности изложения дается классическая теория бифуркации Андронова—Хопфа для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также методы исследования бифуркации Андронова—Хопфа для функционально-дифференциальных уравнений.

В теме 5 исследуется бифуркация Андронова—Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных. Рассматриваются два случая. В первом случае линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор задачи предполагается нормальным, а преобразования пространственных переменных удовлетворяют условиям нормальности таких операторов, полученным в теме 2. Во втором случае нормальность этого оператора не предполагается, а преобразования пространственных переменных принадлежат более широкому классу преобразований.

Третий раздел пособия (темы 6 и 7) посвящен элементам общей теории линейных эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. Здесь рассматриваются уравнения порядка $2m$, содержащие преобразования аргументов искомой функции под знаком старших производных. Такие уравнения тесно связаны с теорией нелокальных эллиптических задач [53] и имеют ряд приложений, например, в теории упругости [17,48], теории плазмы [3], теории диффузионных процессов [41,42,51]. Кроме того, они доставляют важный пример уравнений, для которых дано положительное решение задачи Т. Като о квадратном корне из диссипативного оператора [35,44]. С другой стороны, наличие в старших членах уравнения преобразований, отображающих точки границы внутрь области, приводит к ряду принципиально новых свойств по сравнению с классической теорией эллиптических дифференциальных уравнений.

Теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ была построена в работах А. Л. Скубачевского [53]. Им были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной, фредгольмовой и нетеровой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, а также гладкости обобщенных решений. В указанной монографии также подробно рассмотрены приложения эллиптических дифференциально-разностных уравнений в механике деформируемого твердого тела, в теории полугрупп Феллера и др.

В настоящем пособии рассматриваются уравнения, содержащие растяжения и сжатия аргументов искомой функции в старших членах.

Функционально-дифференциальные уравнения со сжатием аргумента в одномерном случае рассматривались многими авторами, в том числе и Т. Като [45] (см. также [37, 43]). Большая часть работ посвящена вопросам представления, асимптотического поведения и устойчивости решений начальных задач. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями изучались в [21–23]. В работе [21] была решена проблема коэрцитивности задачи Дирихле в случае уравнения с постоянными коэффициентами. Содержание темы 6 данного пособия (исследование фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева общей краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами) опирается на статью [22], а результаты темы 7 (однозначная разрешимость функционально-дифференциального уравнения в весовых пространствах) впервые опубликованы в статье [23].

Важной особенностью и значительной трудностью при исследовании краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений служит наличие негладких решений. Так, обобщенные решения краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений могут иметь степенные особенности в некоторых точках (как на границе, так и внутри области) даже при бесконечно гладких границе и правых частях [53]. Поэтому общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений естественно рассматривать не только в пространствах Соболева, но и весовых пространствах [29]. Краевая задача для эллиптического уравнения с растяжением и сжатием аргументов в окрестности начала координат — неподвижной точки оператора сжатия — может иметь наряду с единственным гладким решением бесконечномерное ядро, состоящее из негладких функций [22]. Поведение вблизи начала координат решений уравнений с растяжением и сжатием аргументов также удобно учитывать введением подходящего веса [23].

Все научные результаты, входящие в данное учебное пособие, были получены в работах авторов [4–7, 21–23], за исключением темы 1 и темы 4. Указанные темы содержат известные математические факты, которые приведены для полноты изложения. Темы 1–5 написаны Е. М. Варфоломеевым, темы 6-7 Л. Е. Россовским.

Раздел I

НОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Тема 1

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОПЕРАТОРОВ

В этой теме рассматриваются некоторые факты из спектральной теории нормальных операторов, а также операторов с компактной резольвентой. Эти факты являются общеизвестными, однако не всегда преподаются для студентов физико-математических специальностей. Материал этой темы будет использоваться в темах 3, 5 и 6. Изложение ведется по книгам [12, 24].

1.1. Банаховы алгебры

1.1.1. Алгебры. Ряд важнейших результатов спектральной теории операторов опирается на абстрактные понятия алгебр и их свойств, которые рассматриваются в этом пункте.

Определение 1.1. *Комплексной алгеброй* называется линейное пространство A над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, в котором определено умножение, удовлетворяющее условиям

$$x(yz) = (xy)z,$$
$$(x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz,$$
$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

для всех $x, y, z \in A$ и всех $\alpha \in \mathbb{C}$. $\square$

Комплексная алгебра A называется *коммутативной*, если $xy = yx$ для всех $x, y \in A$. *Подалгеброй* алгебры A называется ее линейное подпространство, замкнутое относительно операции умножения.

Определение 1.2. *Банаховой алгеброй* называется комплексная алгебра A, которая является банаховым пространством относительно некоторой нормы, удовлетворяющей *мультипликативному неравенству*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad x, y \in A,$$

и, кроме того, A содержит *единичный элемент* e такой, что $\|e\| = 1$ и $xe = ex = x$, $x \in A$. □

Наличие единичного элемента очень часто опускается в определении банаховой алгебры. Однако, когда в алгебре есть единичный элемент, имеет смысл говорить об обратимости относительно умножения, и это делает более естественным определение спектра элемента. Кроме того, потеря в общности от предположения о наличии единицы невелика: большинство естественно возникающих банаховых алгебр обладает единицей, и существует канонический способ дополнения единицей любой банаховой алгебры (см. [24, гл. 10]).

Пример 1.1. Пусть $C(K)$ — банахово пространство всех комплексных непрерывных функций на непустом компактном хаусдорфовом пространстве K, наделенное нормой $\|f\| = \sup\limits_{p \in K} |f(p)|$. Определим умножение обычным способом, а именно $(fg)(p) = f(p)g(p)$. Тем самым $C(K)$ становится коммутативной банаховой алгеброй, единичным элементом которой служит функция, тождественно равная 1.

Если K — конечное множество, состоящее из n элементов, то $C(K)$ есть просто $\mathbb{C}^n$ с покоординатным умножением. В частности, при $n = 1$

мы получаем самую простую банахову алгебру: $\mathbb{C}$ с абсолютной величиной (модулем) в качестве нормы. $\square$

Пример 1.2. Пусть X — банахово пространство. Тогда $\mathcal{B}(X)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на X — является банаховой алгеброй относительно обычной операторной нормы. Тождественный оператор I служит единицей этой алгебры. Если размерность X равна $n < \infty$, то алгебра $\mathcal{B}(X)$ совпадает с алгеброй всех квадратных матриц порядка n. При $n > 1$ алгебра $\mathcal{B}(X)$ некоммутативна. (Тривиальный случай $n = 0$ не рассматривается.) $\square$

1.1.2. Гомоморфизмы и идеалы. Одним из наиболее важных типов отображений одной банаховой алгебры в другую служат гомоморфизмы.

Определение 1.3. Пусть A и B — комплексные алгебры. Линейное отображение $H : A \to B$ называется *гомоморфизмом*, если $h(xy) = h(x)h(y)$. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. $\square$

Особый интерес представляет тот случай, когда образом относительно h служит простейшая из банаховых алгебр — поле $\mathbb{C}$. Большинство продвижений в коммутативной ситуации решающим образом зависит от наличия достаточно большого запаса гомоморфизмов данной алгебры в поле $\mathbb{C}$.

Определение 1.4. Пусть A — комплексная алгебра и φ — линейный функционал на A, $\varphi \not\equiv 0$. Если

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \in A,$$

то функционал φ называется *комплексным гомоморфизмом* на алгебре A. $\square$

Определение 1.5. Элемент $x \in A$ называется *обратимым*, если он обладает *обратным* в A, т. е. если существует такой элемент $x^{-1} \in A$, что

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e,$$

где e — единичный элемент алгебры A. $\square$

Определение 1.6. *Спектром* $\sigma(x)$ элемента x банаховой алгебры A называется множество всех таких комплексных чисел λ, что элемент $x - \lambda e$ не имеет обратного в A. $\square$

Спектр элемента зависит от алгебры A. Если A является подалгеброй более широкой алгебры B, то может оказаться, что некоторый элемент $x \in A$ необратим в A, но обратим в B. Поэтому $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$.

Теорема 1.1 (см. [24, теорема 10.9])**.** *Если φ — такой линейный функционал на банаховой алгебре A, что $\varphi(e) = 1$ и $\varphi(x) \neq 0$ для каждого обратимого элемента $x \in A$, то*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Определение 1.7. Линейное подпространство J коммутативной комплексной алгебры A называется *идеалом*, если $xy \in J$ при всех $x \in A$, $y \in J$. Идеал называется *собственным*, если $J \neq A$. Собственный идеал называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком большем собственном идеале. $\square$

Если A, B — коммутативные банаховы алгебры и φ — гомоморфизм из A в B, то очевидно, что ядро φ является идеалом в A.

Теорема 1.2 (см. [24, теорема 11.5])**.** *Пусть A — коммутативная банахова алгебра и Δ — множество всех ненулевых комплексных гомоморфизмов алгебры A.*

(1) *Каждый максимальный идеал алгебры A есть ядро некоторого гомоморфизма $h \in \Delta$.*

(2) *Ядро каждого гомоморфизма $h \in \Delta$ есть максимальный идеал алгебры A.*

(3) *Элемент $x \in A$ тогда и только тогда обратим в A, когда $h(x) \neq 0$ для каждого $h \in \Delta$.*

(4) *Элемент $x \in A$ тогда и только тогда обратим в A, когда x не содержится ни в одном собственно идеале алгебры A.*

Определение 1.8. Пусть Δ — множество всех комплексных гомоморфизмов коммутативной банаховой алгебры A. Формула

$$\widehat{x}(h) = h(x), \quad h \in \Delta,$$

сопоставляет каждому элементу $x \in A$ функцию $\widehat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$. Функция $\widehat{x}$ называется преобразованием Гельфанда элемента x. $\square$

Будем обозначать $\widehat{A}$ множество таких функций $\widehat{x}$ для всех $x \in A$. *Топологией Гельфанда* на Δ называется слабая топология, порожденная семейством $\widehat{A}$, т. е. слабейшая топология, в которой все функции $\widehat{x} \in \widehat{A}$ непрерывны.

Так как по теореме 1.2 существует взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами алгебры A и элементами множества Δ, то множество Δ, снабженное топологией Гельфанда, называется *пространством максимальных идеалов* алгебры A.

1.1.3. B^*-алгебры.

Определение 1.9. Отображение $x \to x^*$ комплексной алгебры A в себя называется *инволюцией*, если это отображение обладает следующими свойствами:

$$(x+y)^* = x^* + y^*,$$

$$(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*,$$

$$(xy)^* = y^* x^*,$$

$$x^{**} = x$$

для всех $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Определение 1.10. Элемент $x \in A$ называется *эрмитовым* (или *самосопряженным*), если $x^* = x$. $\square$

Определение 1.11. Пусть A — комплексная алгебра с инволюцией. Элемент $x \in A$ называют *нормальным*, если $xx^* = x^*x$. Множество $S \subset A$ называют нормальным, если S коммутативно и вместе с каждым элементом x содержит x^*. $\square$

Пример 1.3. На алгебре $C(X)$ инволюцией является $f \to f^*$. $\square$

Пример 1.4. Переход от оператора к сопряженному оператору является инволюцией в гильбертовом пространстве. $\square$

Определение 1.12. *B^*-алгеброй* называется банахова алгебра с инволюцией $x \to x^*$, удовлетворяющая условию $\|xx^*\| = \|x\|^2$ для всех своих элементов. $\square$

Из условий $\|xx^*\| \leqslant \|x\|\|x^*\|$ и $x^{**} = x$ вытекает, что в любой B^*-алгебре $\|x^*\| = \|x\|$.

Теорема 1.3 (Гельфанд—Наймарк, см. [24, теорема 11.18]). *Пусть A — коммутативная B^*-алгебра с пространством максимальных идеалов Δ. Тогда преобразование Гельфанда является изометрическим* *изоморфизмом алгебры A на $C(\Delta)$ и, кроме того, обладает свойством*

$$h(x^*) = \overline{h(x)}, \quad x \in A, h \in \Delta.$$

Как следствие, элемент $x \in A$ эрмитов тогда и только тогда, когда $\widehat{x}$ — вещественная функция.

Следующая теорема представляет собой частный случай теоремы 1.3. В ней фигурирует отображение, обратное преобразованию Гельфанда, что позволяет выявить контакты результатов такого сорта с функциональным исчислением и будет использоваться в пункте 6.1 для построения символов функционально-дифференциальных операторов.

Теорема 1.4 (см. [24, теорема 11.19]). *Пусть A — коммутативная B^*-алгебра, содержащая такой элемент x, что полиномы от x и x^* плотны в A. Тогда формула*

$$(\Psi f)\widehat{} = f \circ \widehat{x}$$

определяет изометрический изоморфизм Ψ алгебры $C(\sigma(x))$ на алгебру A, причем

$$\Psi \overline{f} = (\Psi f)^*$$

для каждого $f \in C(\sigma(x))$. Кроме того, если $f(\lambda) = \lambda$ на $\sigma(x)$, то $\Psi f = x$.

Следующая теорема показывает совпадение спектров для некоммутативных алгебр и также будет применяться в пункте 6.1.

Теорема 1.5 (см. [24, теорема 11.29]). *Пусть A есть B^*-алгебра, а B — замкнутая подалгебра в A, причем $e \in B$ и $x^* \in B$ для любого $x \in B$. Тогда $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ для любого $x \in B$.*

1.2. Ограниченные операторы в гильбертовом пространстве

1.2.1. Свойства нормальных операторов и проекторов. Будем обозначать через $\mathcal{B}(H)$ банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов T на гильбертовом пространстве $H \neq \{0\}$, обладающую нормой

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Более того, легко проверить, что $\mathcal{B}(H)$ является B^*-алгеброй относительно операции инволюции, заданной переходом к сопряженному оператору $T \to T^*$.

Ядро и образ оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ связаны следующими соотношениями.

Теорема 1.6 (см. [24, теорема 12.10]). *Если $T \in \mathcal{B}(H)$, то*

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp}, \qquad \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^{\perp}.$$

Определение 1.13. Оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ называется

нормальным, если $TT^* = T^*T$;

самосопряженным (или *эрмитовым*), если $T^* = T$;

унитарным, если $TT^* = T^*T = I$, где I — единичный оператор в пространстве H;

проектором, если $T^2 = T$. □

Очевидно, что самосопряженные и унитарные операторы являются нормальными.

Теорема 1.7 (см. [24, теорема 12.12]). *Пусть $T \in \mathcal{B}(H)$.*

(1) *Оператор T тогда и только тогда нормален, когда $\|Tx\| = \|T^*x\|$ для каждого $x \in H$.*

(2) *Если оператор T нормален, то $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$.*

(3) *Если оператор* T *нормален и* $Tx = \alpha x$ *при некотором* $x \in H$ *и* $\alpha \in \mathbb{C}$, *то* $T^*x = \overline{\alpha}x$.

(4) *Если оператор* T *нормален, а* α, β — *различные собственные значения оператора* T, *то соответствующие собственные подпространства ортогональны.*

Теорема 1.8 (см. [24, теорема 12.13]). *Если* $U \in \mathcal{B}(H)$, *то следующие три условия эквивалентны*:

(1) U — *унитарный оператор*;

(2) $\mathcal{R}(U) = H$ *и* $(Ux, Uy) = (x, y)$ *для всех* $x, y \in H$;

(3) $\mathcal{R}(U) = H$ *и* $\|Ux\| = \|x\|$ *для каждого* $x \in H$.

Эквивалентность условий (1) и (2) означает, что унитарные операторы суть в точности линейные изоморфизмы пространства H, сохраняющие скалярное произведение. Таким образом, этими операторами исчерпываются *автоморфизмы гильбертова пространства*.

Теорема 1.9 (см. [24, теорема 12.14]). *Для каждого проектора* $P \in \mathcal{B}(H)$ *выполнение любого из следующих четырех условий влечет за собой выполнение трех остальных*:

(1) *оператор* P *является самосопряженным*;

(2) *оператор* P *является нормальным*;

(3) $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^{\perp}$;

(4) $(Px, x) = \|Px\|^2$ *для каждого* $x \in H$.

Теорема 1.10 (см. [24, теорема 12.15]). *Пусть* $S, T \in \mathcal{B}(H)$ *и* S — *самосопряженный оператор. Тогда* $ST = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{R}(S) \perp \mathcal{R}(T)$.

Пусть x, y — коммутирующие элементы некоторой банаховой алгебры с инволюцией. Очевидно, что тогда x^*, y^* также коммутируют, поскольку $x^*y^* = (yx)^*$. Верно ли, что тогда x, y^* коммутируют? Ответ в общем случае будет отрицательным (например, если элемент x не является нормальным и $y = x$). Более того, ответ может оказаться отрицательным, если оба элемента x, y нормальны (см. [24, упр. 28, с. 367]). Однако ответ положителен для нормальных x в B^*-алгебре $\mathcal{B}(H)$. Имеет место следующий более общий факт.

Теорема 1.11 (см. [24, теорема 12.16])**.** *Пусть $M, N, T \in \mathcal{B}(H)$, причем операторы M, N нормальны. Если $MT = TN$, то $M^*T = TN^*$.*

1.2.2. Спектральное разложение. Главное утверждение спектральной теоремы заключается в том, что каждый ограниченный нормальный оператор T в гильбертовом пространстве порождает некоторым каноническим способом разложение единицы E на борелевских подмножествах его спектра $\sigma(T)$ и что оператор T может быть восстановлен по E при помощи процесса интегрирования. Большинство результатов теории нормальных операторов опирается на этот факт.

Говоря о спектре $\sigma(T)$ оператора T, мы всегда имеем в виду всю алгебру $\mathcal{B}(H)$. Другими словами, $\lambda \in \sigma(T)$ означает, что оператор $T - \lambda I$ не имеет обратного в $\mathcal{B}(H)$. Вместе с тем мы будем иметь дело и с замкнутыми подалгебрами A алгебры $\mathcal{B}(H)$, которые обладают тем дополнительным свойством, что $I \in A$ и $S \in A$, если $S \in A$. Так как алгебра $\mathcal{B}(H)$ является B^*-алгеброй, то ввиду теоремы 1.5 в такой ситуации $\sigma(T) = \sigma_A(T)$ для каждого оператора $T \in A$.

Определение 1.14. *σ-алгеброй* подмножеств множества Ω называется набор подмножеств, содержащий любые счетные объединения и пересечения, а также разности и дополнения всех входящих в него подмножеств. $\square$

Определение 1.15. Пусть $\mathcal{M}$ есть некоторая σ-алгебра подмножеств множества Ω и H — гильбертово пространство. *Разложением единицы* на $\mathcal{M}$ называется отображение

$$E : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(H),$$

обладающее следующими свойствами:

(1) $E(\varnothing) = 0$, $E(\Omega) = I$;

(2) каждый из операторов $E(\omega)$ — самосопряженный проектор;

(3) $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega'')$;

(4) если $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$, то $E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$;

(5) для любых векторов $x, y \in H$ функция множества $E_{x,y}$, определяемая равенством

$$E_{x,y}(\omega) = (E(\omega)x, y),$$

является комплексной мерой на $\mathcal{M}$.

$\square$

Лемма 1.1 (см. [24, предложение 12.18]). *Если E — разложение единицы и $x \in H$, то $\omega \to E(\omega)x$ есть счетно-аддитивная H-значная мера на $\mathcal{M}$.*

Для алгебры нормальных операторов верна следующая теорема.

Теорема 1.12 (см. [24, теорема 12.22]). *Пусть A — некоторая замкнутая нормальная подалгебра алгебры $\mathcal{B}(H)$, содержащая единичный оператор I, и пусть Δ — пространство максимальных идеалов алгебры A. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *На борелевских подмножествах пространства* Δ *существует в точности одно разложение единицы* E *такое, что*

$$(Tx, y) = \int\limits_{\Delta} \widehat{T} dE_{x,y}, \quad x, y \in H,$$

для каждого оператора $T \in A$, *где* $\widehat{T}$ — *преобразование Гельфанда оператора* T *относительно алгебры* A.

(2) $E(\omega) \neq 0$ *для каждого непустого открытого множества* $\omega \subset \Delta$.

(3) *Оператор* $S \in \mathcal{B}(H)$ *в том и только в том случае коммутирует со всем операторами* $T \in A$, *если он коммутирует с каждым проектором* $E(\omega)$.

Конкретизируем этот результат для случая, когда рассматривается один оператор.

Теорема 1.13 (см. [24, теорема 12.23]). *Если* $T \in \mathcal{B}(H)$ — *нормальный оператор, то существует такое однозначно определенное разложение единицы* E *на борелевских подмножествах спектра* $\sigma(T)$ *оператора* T, *что*

$$T = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda).$$

Кроме того, каждый проектор $E(\omega)$ *коммутирует с каждым оператором* $S \in \mathcal{B}(H)$, *коммутирующим с оператором* T.

В такой ситуации E *называется спектральным разложением оператора* T.

Определение 1.16. Если E — спектральное разложение некоторого нормального оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ и f — произвольная ограниченная борелевская функция на $\sigma(T)$, то *функция от оператора* $f(T)$ определяется формулой

$$f(T) = \int\limits_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda).$$

$\square$

Теорема 1.14 (см. [24, теорема 12.28]). *Пусть* E — *спектральное разложение нормального оператора* $T \in \mathcal{B}(H)$. *Если* $f \in C(\sigma(T))$ *и* $\omega_0 = f^{-1}(0)$, *то*

$$\mathcal{N}(f(T)) = \mathcal{R}(E(\omega_0)).$$

Следующая теорема устанавливает свойства собственных значений и собственных функций ограниченного нормального оператора.

Теорема 1.15 (см. [24, теорема 12.29]). *Пусть* E — *спектральное разложение нормального оператора* $T \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ *и* $E_0 = E(\lambda_0)$. *Тогда*

(1) $\mathcal{N}(T - \lambda_0 I) = \mathcal{R}(E_0)$;

(2) λ_0 *служит собственным значением оператора* T *тогда и только тогда, когда* $E_0 \neq 0$;

(3) *каждая изолированная точка спектра* $\sigma(T)$ *является собственным значением оператора* T;

(4) *если множество* $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ *счетно или конечно, то каждый вектор* $x \in H$ *однозначно представляется в виде*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

где $Tx_i = \lambda_i x_i$. *При этом* $x_i \perp x_j$, *если* $i \neq j$.

С учетом того, что собственные функции оператора определены с точностью до постоянного множителя, свойство (4) означает существование в H ортонормированного базиса, состоящего из собственных функций оператора T.

Доказательство. Утверждение (1) получается непосредственно из теоремы 1.14, если положить там $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$. Ясно, что утверждение (2) вытекает из (1). Если λ_0 — изолированная точка множества $\sigma(T)$, то $\{\lambda_0\}$ есть непустое открытое множество в $\sigma(T)$. Поэтому $E_0 \neq 0$ в силу утверждения (2) теоремы 1.12. Следовательно, утверждение (3) вытекает из (2).

Для доказательства утверждения (4) рассмотрим проекторы $E_i = E(\{\lambda_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$. Если λ_i — предельная точка множества $\sigma(T)$, то проектор E_i может быть нулевым или ненулевым. Однако в любом случае проекторы E_i имеют взаимно ортогональные образы. Из счетной аддитивности отображения $\omega \to E(\omega)x$ (лемма 1.1) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i x = E(\sigma(T))x = x, \quad x \in H.$$

Этот ряд сходится по норме пространства H. Поэтому мы получим искомое представление, если положим $x_i = E_i x$. Единственность представления вытекает из ортогональности векторов x_i, а условие $Tx_i = \lambda_i x_i$ вытекает из утверждения (1). $\square$

1.3. Неограниченные операторы в гильбертовом пространстве

Определение 1.17. Линейный оператор $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ (необязательно ограниченный) называется *нормальным*, если область определения $\mathcal{D}(T)$ плотна в H, $\mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(TT^*)$, оператор T замкнут и удовлетворяет условию $T^*Tx = TT^*x, \quad x \in \mathcal{D}(T^*T)$. □

Теорема 1.16 (см. [24, теорема 13.22]). *Пусть N — нормальный оператор в пространстве H. Тогда*:

(1) $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*)$;

(2) $\|Nx\| = \|Nx^*\|$ *для всякого* $x \in \mathcal{D}(N)$;

(3) *не существует нормального оператора N' такого, что $\mathcal{D}(N) \subset \mathcal{D}(N')$ и $Nx = N'x$ для всех $x \in \mathcal{D}(N)$.*

Последнее утверждение записывают так: *не существует нормального оператора N' такого, что $N \subset N'$.*

Как и в случае ограниченных операторов, всякий нормальный оператор может быть представлен с помощью своего спектрального разложения.

Теорема 1.17 (см. [24, теорема 13.33]). *Для каждого нормального оператора N в пространстве H существует единственное спектральное разложение E, удовлетворяющее соотношению*

$$(Nx, y) = \int\limits_{\sigma(N)} \lambda dE_{x,y}(\lambda), \quad x \in \mathcal{D}(N),\ y \in H.$$

Кроме того, $E(\omega)S = SE(\omega)$ для всякого борелевского множества $\omega \in \sigma(N)$ и всякого оператора $S \in \mathcal{B}(H)$, коммутирующего с оператором N в том смысле, что $SN \subset NS$.

Из теоремы 1.17 выводится аналогично доказательству теоремы 1.15 утверждение о существовании в пространстве H ортонормированного базиса, состоящего из собственных функций неограниченного нормального оператора.

1.4. Операторы с компактной резольвентой в банаховом пространстве

Операторы с компактной резольвентой часто встречаются в математической физике. Можно сказать, что большинство дифференциальных операторов, возникающих в связи с классической граничной задачей, принадлежат этому типу. В этом пункте мы будем рассматривать такие операторы в банаховом пространстве X.

Определение 1.18. *Оператором с компактной резольвентой* в банаховом пространстве называют замкнутый оператор T, резольвента которого $R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$ существует и компактна хотя бы для некоторого $\lambda = \lambda_0$. □

Сначала сформулируем некоторые свойства замкнутых и компактных операторов.

Теорема 1.18 (см. [12, гл. III, пункт 6.3])**.** *Пусть T — замкнутый обратимый оператор в X. Спектр оператора $R(\lambda_0, T)$ есть ограниченное множество, в которое переходит спектр $\sigma(T)$ при отображении $\lambda \to (\lambda - \lambda_0)^{-1}$.*

Кроме того,

$$R((\lambda - \lambda_0)^{-1}, R(\lambda_0, T)) = -(\lambda - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0)^2 R(\lambda_0, T). \qquad (1.1)$$

Теорема 1.19 (см. [12, гл. III, пункт 6.7, теорема 6.26]). *Предположим, что линейный оператор T компактен. Тогда его спектр $\sigma(T)$ — счетное множество, не имеющее предельных точек, отличных от нуля. Каждое число $\lambda \in \sigma(T)$ является собственным значением конечной кратности для T, а $\overline{\lambda}$ — собственным значением той же кратности для T^*.*

Теперь докажем теорему о спектре оператора с компактной резольвентой.

Теорема 1.20 (см. [12, гл. III, пункт 6.8, теорема 6.29]). *Пусть T — замкнутый оператор в X такой, что при некотором λ_0 его резольвента $R(\lambda_0, T)$ существует и компактна. Тогда спектр $\sigma(T)$ состоит из изолированных собственных значений, имеющих конечные кратности, а резольвента $R(\lambda, T)$ компактна для каждого $\lambda \in \rho(T)$.*

Здесь $\rho(T)$ обозначает резольвентное множество оператора T.

Доказательство. Согласно теореме 1.19, спектр резольвенты $\sigma(R(\lambda_0, T))$ — счетное множество, не имеющее ненулевых предельных точек. Из теоремы 1.18 следует, что $\sigma(R(\lambda_0, T))$ — образ спектра оператора $\sigma(T)$ при отображении $\lambda \to (\lambda - \lambda_0)^{-1}$. Поэтому спектр оператора $\sigma(T)$ состоит только из изолированных точек, не имеющих предельной точки, кроме ∞. Из формулы (1.1) с помощью замены переменной интегрирования получим, что собственный проектор оператора T (см. [12, гл. I, пункты 5.3, 5.4])

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R(\lambda, T) d\lambda,$$

соответствующий $\lambda \in \sigma(T)$, совпадает с собственным проектором резольвенты $R(\lambda_0, T)$, соответствующим собственному значению $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$.

Отсюда следует, в частности, что $\dim \mathcal{R}(P) < \infty$, т. е. каждое собственное значение λ оператора T имеет конечную кратность. Далее, соотношение

$$R(\lambda, T) = R(\lambda_0, T)(1 + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda, T)), \quad \lambda \in \rho(T),$$

вытекающее из резольвентного уравнения, показывает, что оператор $R(\lambda, T)$ компактен для каждого $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

Тема 2

НОРМАЛЬНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Одним из методов изучения нелинейной задачи (1) (см. введение) является линеаризация и изучение свойств линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора задачи. Важную роль играет нормальность такого оператора. В этой теме исследуется нормальность класса линейных операторов, соответствующего задаче (1). Полученные условия нормальности будут использованы в темах 3 и 5. Результаты этой темы были получены в работах [6, 7].

2.1. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$. Обозначим g_i, $i = 1, \ldots, N$, $N \geqslant 2$, взаимно однозначные преобразования класса C^3 такие, что

$$g_i : V \subset \mathbb{R}^n \to g_i(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_{g_i}(x)| \neq 0, \quad x \in V,$$

где V — ограниченная область, $\overline{Q} \subset V$, $J_{g_i}(x) = [\partial g_{ip}/\partial x_q]_{p,q=1}^n$ — матрица Якоби преобразования g_i, $|J_{g_i}(x)| = |\det J_{g_i}(x)|$, $i = 1, \ldots, N$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$g_i(Q) \subseteq Q, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.1}$$

Введем неограниченный оператор $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле $A_0 v = \Delta v$, $v \in \mathcal{D}(A_0)$, с областью определения

$\mathcal{D}(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$. Здесь $W_2^k(Q)$ обозначает пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными вплоть до порядка k включительно, оператор $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial \nu)|_{\partial Q}$ задает краевые условия, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$.

Как известно, оператор A_0 — самосопряженный. Рассмотрим оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$,

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

где A_i, $i = 1, \ldots, N$ — ограниченные линейные операторы преобразования переменных, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ по формуле

$$A_i : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_i v(x) = a_i v(g_i(x)),$$

где $a_i \neq 0$ — вещественные числа, $i = 1, \ldots, N$.

Положим $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0)$.

Неограниченный оператор T называется нормальным, если он замкнут, определен на плотном множестве, $\mathcal{D}(TT^*) = \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}$ и $TT^*v = T^*Tv$ для всех $v \in \mathcal{D}$.

Введем множества $G_{g_i}^m = \{x \in Q : g_i^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, N$. Здесь $g_i^m(x)$ обозначает преобразование g_i, примененное m раз. Обозначим $\widetilde{G}_{g_i}^m = Q \setminus G_{g_i}^m$. Будем записывать суперпозицию преобразований в виде $g_i g_j(x)$, $g_i^{-1} g_j(x)$ и т. д.

2.2. Необходимые и достаточные условия нормальности

Сначала введем несколько условий, которые будут использоваться при формулировке теорем.

Условие 2.1. $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ *для любого подмножества* $\mathcal{K} \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Условие 2.2. *$g_i(x) \neq g_j^{-1}(x)$ для п. в. $x \in Q$ и всех $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$.*

Условие 2.3. *$\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ для любых $\alpha_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, не равных одновременно нулю.*

Следующие два условия являются более слабыми версиями условий 2.1 и 2.3. Пусть $0 \leqslant M \leqslant N$.

Условие 2.1^M. *$\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ для любого подмножества $\mathcal{K} \subseteq \{1, \dots, M\}$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$.*

Условие 2.3^M. *$\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant M\\ 1 \leqslant j \leqslant N\\ i<j}} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ для любых $\alpha_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, не равных одновременно нулю.*

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$.*

(1) *Если оператор A — нормальный и выполнены условия 2.1 и 2.2, то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.2}$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

(2) *Если выполнено свойство (2.2) и*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i, j = 1, \dots, N, \tag{2.3}$$

то оператор A — нормальный.

(3) *Если выполнены условия 2.1, 2.2 и 2.3, то оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства (2.2) и (2.3).*

Теорема 2.2. *Пусть* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если оператор* A — *нормальный и выполнено хотя бы одно из условий* 2.1, 2.2, *то*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.4}$$

а оператор A *является самосопряженным.*

(2) *Если выполнено свойство* (2.4), *то оператор* A — *самосопряженный.*

Теорема 2.3. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если оператор* A — *нормальный и выполнены условия* 2.1^M *и* 2.2, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{2.5}$$

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = M+1, \dots, N, \tag{2.6}$$

где K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

(2) *Если выполнены свойства* (2.5) *и* (2.6), *а также*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \tag{2.7}$$

то оператор A — *нормальный.*

(3) *Если выполнены условия* 2.1^M, 2.2 *и* 2.3^M, *то оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (2.5)–(2.7).

Существенность используемых условий будет обоснована примерами 2.4, 2.6, 2.8 и 2.9 (см. §§ 2.5, 2.7).

2.3. Комментарии

Теоремы 2.1 и 2.2 являются частными случаями теоремы 2.3 при $M = N$ и $M = 0$ соответственно. В случае $M = 0$ (теорема 2.2) оказалось возможным дополнительно усилить результат теоремы 2.3, заменив нормальность на самосопряженность, а условие 2.2 на условие 2.1.

Теоремы 2.1–2.3 обобщают результаты, полученные для случая одного преобразования пространственных переменных ($N = 1$) в работе [27]. При $N = 1$ обозначим через g единственное преобразование пространственных переменных. Тогда верны следующие утверждения.

Теорема 2.4 (см. [27]). *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$. Тогда оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда*

$$g(Q) = Q, \quad g(x) = Kx + b \quad (x \in Q),$$

где K — ортогональная матрица размера $n \times n$, $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.5 (см. [27]). *Пусть $G_g^2 = \varnothing$. Тогда оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда*

$$g(Q) = Q, \quad |J_g(x)| = 1 \quad (x \in Q).$$

Рассмотрим классы преобразований (2.2) и (2.4), описанные в теоремах 2.1–2.3. Очевидно, что преобразования класса (2.2) принадлежат классу (2.4). Рассмотрим примеры, показывающие, что существуют преобразования класса (2.4), не принадлежащие классу (2.2).

Пример 2.1. В соответствии с условиями теоремы 2.2 построим взаимно однозначное преобразование g такое, что $g \in C^3$, $g(Q) = Q$, $g^2(x) = x$ и $|J_g(x)| = 1$ для всех $x \in Q$. Положим $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ и рассмотрим преобразование *квазиповорота*

$$\omega : (r, \varphi) \mapsto (r, \widehat{\omega}(r, \varphi)),$$

где r и φ — полярные координаты, соответствующие координатам (x_1, x_2). Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

легко показать, что $|J_\omega(r,\varphi)| = \left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\widehat{\omega}(r,\varphi)\right|$. Положим

$$\widehat{\omega}(r,\varphi) = \varphi + r^2.$$

Тогда $|J_\omega(r,\varphi)| \equiv 1$. Очевидно, что преобразование ω взаимно однозначно, $\omega(Q) = Q$, а обратное преобразование $\omega^{-1}(x)$ определяется функцией $\widehat{\omega}(r,\varphi) = \varphi - r^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\omega \in C^3$. Преобразование ω не принадлежит классу (2.2).

Обозначим через h взаимно однозначное преобразование отражения относительно диаметра круга Q. Очевидно, что $h \in C^\infty$, $h(Q) = Q$, а также $h^2(x) = x$ и $|J_h(x)| = 1$ для всех $x \in Q$. Преобразование h принадлежит классу (2.2).

Тогда преобразование $g = \omega^{-1}h\omega$ обладает всеми требуемыми свойствами, однако не принадлежит классу (2.2). $\square$

В работе [54] построен следующий пример преобразования класса (2.4), не принадлежащего классу (2.2). Отметим, что здесь область Q не является кругом.

Пример 2.2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ такая, что:

(1) если $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_1$, то $(x_1, -x_2) \in \Gamma_1$, где $\Gamma_1 = \{x \in \partial Q : |x_2| \geqslant 7/4\}$;

(2) множество $\Gamma_2 = \{x \in \partial Q : 0 \leqslant x_2 \leqslant 7/4\}$ состоит из двух отрезков $\{x : x_1 = \pm 2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 7/4\}$;

(3) множество $\Gamma_3 = \{x \in \partial Q : -7/4 \leqslant x_2 \leqslant 0\}$ состоит из двух кривых $\{x : x_1 = \pm 2 + \xi(x_2),\ -7/4 \leqslant x_2 \leqslant 0\}$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ —

нечетная функция такая, что $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1/2$, $\xi(t) = 1/2$ при $3/4 \leqslant t \leqslant 5/4$, $\xi(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2] \cup [3/2, \infty)$.

Рассмотрим отображение $g(x) = (x_1 - \xi(x_2), -x_2)$. Очевидно, $|J_g(x)| = 1$ и $g^2(x) = x$ для всех $x \in Q$, а также $g \in C^\infty$ и $g(Q) = Q$. Отображение g принадлежит классу (2.4), но не принадлежит классу (2.2). $\square$

Примеры 2.4, 2.6, 2.8 и 2.9 в §§ 2.5, 2.7 показывают существенность условий 2.1, 2.2 и 2.3^M. В этом пункте рассмотрим более подробно условия 2.3 и 2.3^M.

Условие 2.3 достаточно громоздко, однако оно выполняется для почти всех векторов $(a_1, \ldots, a_N)$, исключая только множество меры нуль в $\mathbb{R}^N$ (конечное число гиперповерхностей). С другой стороны, многие простые наборы коэффициентов $a_1, \ldots, a_N$ не удовлетворяют условию 2.3 (например, коэффициенты $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$). Трудность заключается в том, что условие 2.3 при больших N практически невозможно проверить: речь идет о $5^{N(N-1)/2} - 3^{N(N-1)/2}$ неравенствах. Условие 2.3 требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (2.3) в теореме 2.1 следует из нормальности оператора A. Аналогично условие 2.3^M требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (2.7) в теореме 2.3 следует из нормальности оператора A.

Ниже в этом пункте мы построим пример чисел $a_1, \ldots, a_N$, удовлетворяющих условию 2.3. Фактически будут сформулированы некоторые достаточные условия, при которых выполняется условие 2.3. Сначала докажем некоторые предложения.

Предложение 2.1. *Пусть* $\{b_k\}_{k=0}^\infty$, $b_k = b_0 q^k$ — *геометрическая прогрессия в* $\mathbb{R}$ *со знаменателем* $q \geqslant 2$. *Тогда для любой конечной подпоследовательности* $\{b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_N}\}$ $(0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \infty)$ *и* *любых чисел* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, N$ *таких, что*

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} |\alpha_i|}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} |\alpha_i|} \leqslant m, \quad 1 \leqslant m \leqslant q-1,$$

следующая линейная комбинация чисел не обращается в нуль:

$$\alpha_1 b_{k_1} + \alpha_2 b_{k_2} + \ldots + \alpha_N b_{k_N} \neq 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$|\alpha_1 b_{k_1} + \alpha_2 b_{k_2} + \ldots + \alpha_{N-1} b_{k_{N-1}}| < |\alpha_N b_{k_N}|. \tag{2.8}$$

Разделим обе части неравенства (2.8) на $|\alpha_N|$. Тогда, используя определение чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$, оценим левую часть неравенства:

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_N} b_{k_i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_N} b_{k_i}\right| \leqslant m \sum_{i=0}^{N-1} |b_{k_i}|.$$

В силу этой оценки неравенство (2.8) следует из неравенства

$$m \sum_{i=0}^{N-1} |b_{k_i}| < |b_{k_N}|. \tag{2.9}$$

По определению чисел b_k, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, неравенство (2.9) преобразуется к виду

$$m \frac{q^{k_N} - 1}{q - 1} < q^{k_N}. \tag{2.10}$$

Обозначим $\varepsilon = q - 1 - m$. Тогда неравенство (2.10) превращается в неравенство $1 - q < \varepsilon(q^{k_N} - 1)$, которое верно, поскольку $q \geqslant 2$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant q - 2$ в силу условия $1 \leqslant m \leqslant q - 1$. $\square$

Используем обозначение $\mathbb{Q}$ для множества рациональных чисел.

Предложение 2.2. *Для любых* $p \in \mathbb{Q}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{Q}$ (*таких что* $\exists \alpha_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant N$) *и* $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_N)$ *выполнено следующее неравенство*:

$$\alpha_1 \cos(n_1) + \alpha_2 \cos(n_2) + \ldots + \alpha_N \cos(n_N) \neq p.$$

Доказательство. Напротив, предположим, что существуют числа $p \in \mathbb{Q}$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ и $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, N$, такие что $n_1 < n_2 < \ldots < n_N$, $\exists \alpha_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant N$, при которых

$$\alpha_1 \cos(n_1) + \alpha_2 \cos(n_2) + \ldots + \alpha_N \cos(n_N) = p.$$

Применяя формулу

$$\cos nx = 2 \cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

представим $\cos n_i$ как линейную комбинацию $(\cos 1)^{n_i}$, $(\cos 1)^{n_i - 1}, \ldots, 1$ с целыми коэффициентами, $i = 1, \ldots, N$. Тогда получим

$$\widehat{\alpha}_{n_N} (\cos 1)^{n_N} + \widehat{\alpha}_{n_N - 1} (\cos 1)^{n_N - 1} + \ldots + \widehat{\alpha}_1 \cos 1 = \widehat{p}.$$

Это алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами. Оно не является тождеством, поскольку легко видеть, что $\widehat{\alpha}_{n_m} \neq 0$, где $m = \max\{i : \alpha_i \neq 0\}$. Однако $\cos 1$ — трансцендентное число, следовательно, оно не является корнем этого уравнения. Полученное противоречие доказывает предложение. □

Следующее предложение дает пример чисел $a_1, \ldots, a_N$, удовлетворяющих условию 2.3.

Предложение 2.3. *Пусть числа*

$$n_i = b_0 q^{k_i}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

таковы, что $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_N$, $b_0, q \in \mathbb{N}$ *и* $q \geqslant 3$. *Тогда числа*

$$a_i = \cos n_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяют условию 2.3.

Доказательство. Рассмотрим сумму из условия 2.3:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, a_i a_j = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, \cos n_i \cos n_j = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \big(\cos(n_i + n_j) + \cos(n_i - n_j)\big). \tag{2.11}$$

В силу предложения 2.1 из определения чисел $n_1, \ldots, n_N$ следует, что $n_i \pm n_j \neq n_k \pm n_l$ для любых $i, j, k, l = 1, \ldots, N$, $i \neq j$, $k \neq l$, $(i,j) \neq (k,l)$. (Действительно, в обозначениях предложения 2.1 мы имеем $b_{k_i} = n_i$, $q \geqslant 3$, $\alpha_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ и $m = 2$.) Следовательно, при любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, сумма в правой части выражения (2.11) состоит из ненулевого числа косинусов с попарно различными целыми аргументами. Тогда из предложения 2.2 следует, что такая сумма не равна нулю. Таким образом, условие 2.3 выполняется для чисел $a_1, \ldots, a_N$. □

Следующее предложение описывает некоторый класс чисел, удовлетворяющих условию 2.3.

Предложение 2.4. *Пусть* $a_1, \ldots, a_N$ — *числа, заданные в предложении* 2.3. *Тогда для любых* $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_N \in \mathbb{Q}$ *и* $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta \neq 0$, *числа*

$$\widehat{a}_i + \delta a_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяют условию 2.3.

Доказательство. Рассмотрим сумму из условия 2.3 для чисел $\widehat{a}_i + \delta a_i$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, (\widehat{a}_i + \delta a_i)(\widehat{a}_j + \delta a_j) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \widehat{a}_i \widehat{a}_j + \delta \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \big(\widehat{a}_i a_j + \widehat{a}_j a_i\big) + \delta^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} a_i a_j. \tag{2.12}$$

Первая сумма в правой части является рациональным числом. Таким же образом, как в доказательстве предложения 2.3, представим вторую и третью суммы в виде линейных комбинаций косинусов целых аргументов с рациональными коэффициентами. В силу предложения 2.1 из определения чисел $n_1, \ldots, n_N$ следует, что $n_k \neq n_i \pm n_j$ для любых $i, j, k = 1, \ldots, N$, $i < j$. (Действительно, в обозначениях предложения 2.1 мы имеем $\{b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}\} = \{n_i, n_j, n_k\}$, $q \geqslant 3$, $\alpha_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ и $m = 2$.) Следовательно, вторая сумма порождает линейную комбинацию косинусов с целыми аргументами, не равными ни одному из целых аргументов косинусов в линейной комбинации, порожденной третьей суммой. С другой стороны, при доказательстве предложения 2.3 было показано, что при любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, линейная комбинация косинусов, порожденная третьей суммой, состоит хотя бы из одного косинуса. Таким образом, для любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, правая часть равенства (2.12) состоит из рационального числа и линейной комбинации с рациональными коэффициентами ненулевого числа косинусов с попарно различными целыми аргументами. Следовательно, в силу предложения 2.2, выражение (2.12) не равно нулю. Это доказывает, что условие 2.3 выполняется для чисел $\widehat{a}_i + \delta a_i$, $i = 1, \ldots, N$. $\square$

Таким образом, можно взять любой набор рациональных чисел $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_N$, удовлетворяющий или не удовлетворяющий условию 2.3, и модифицировать его согласно предложению 2.4 (при этом $\delta \neq 0$ можно выбирать сколь угодно малым). Тогда в силу предложения 2.4 модифицированный набор чисел $\widehat{a}_1 + \delta a_1, \ldots, \widehat{a}_N + \delta a_N$ будет удовлетворять условию 2.3.

2.4. Вспомогательные утверждения

Замечание 2.1. Так как $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_0^*)$, а линейные операторы $A_i, A_i^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $i = 1, \ldots, N$, ограничены, мы имеем $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A_0)$. $\square$

Лемма 2.1. *Оператор A_i^*, сопряженный к оператору A_i, $i = 1, \dots, N$, определяется по формуле*

$$A_i^* v(x) = \begin{cases} a_i |J_{g_i^{-1}}(x)| v(g_i^{-1}(x)), & x \in g_i(Q), \\ 0, & x \in Q \setminus g_i(Q), \end{cases}$$

где $|J_{g_i^{-1}}(x)| = |\det J_{g_i^{-1}}(x)|$, а $J_{g_i^{-1}}(x)$ — матрица Якоби преобразования g_i^{-1}.

Доказательство очевидно: достаточно заменить переменную интегрирования в соответствующем скалярном произведении в $L_2(Q)$.

Лемма 2.2. *Если $G_{g_i}^2 = \varnothing$, то $g_i(Q) = Q$.*

Доказательство. Действительно, поскольку $G_{g_i}^2 = \varnothing$, то для любой точки $x \in Q$ мы имеем $x = g_i^2(x)$. Так как преобразование g_i взаимно однозначно, получим $g_i^{-1}(x) = g_i(x)$. Согласно принятым предположениям, $g_i(Q) \subseteq Q$. Следовательно, любая точка $x \in Q$ имеет прообраз $g_i^{-1}(x) = g_i(x) \in Q$. Таким образом, $g_i(Q) = Q$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, и для любого $x \in Q$ выполнены следующие условия:*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.13}$$

$$\left\{ g_i g_j^{-1}(x),\ g_j g_i^{-1}(x) \right\} = \left\{ g_i^{-1} g_j(x),\ g_j^{-1} g_i(x) \right\}, \quad i, j = 1, \dots, N. \tag{2.14}$$

Тогда оператор $\sum\limits_{i=1}^{N} A_i$ — нормальный.

Доказательство. Используя лемму 2.1, для любых $v \in L_2(Q)$ и $i, j = 1, \dots, N$ при почти всех $x \in Q$ мы получим

$$A_i A_i^* v(x) = a_i^2 |J_{g_i^{-1}}(g_i(x))| v(x), \qquad A_i^* A_i v(x) = a_i^2 |J_{g_i^{-1}}(x)| v(x),$$

$$A_i A_j^* v(x) = a_i a_i |J_{g_j^{-1}}(g_i(x))| v(g_j^{-1} g_i(x)), \quad A_i^* A_j v(x) = a_i a_j |J_{g_i^{-1}}(x)| v(g_j g_i^{-1}(x)).$$

Так как имеет место $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, из условия (2.13) с помощью известного тождества $|J_f(x)|\,|J_{f^{-1}}(f(x))| = 1$ получим $|J_{g_i^{-1}}(x)| = 1$, $x \in Q$. Тогда для любых $v \in L_2(Q)$ при почти всех $x \in Q$ получим

$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\right) v(x) = v(x) \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_i a_j \left(v(g_i^{-1} g_j(x)) + v(g_j^{-1} g_i(x))\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) v(x) = v(x) \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_i a_j \left(v(g_i g_j^{-1}(x)) + v(g_j g_i^{-1}(x))\right).$$

Следовательно, в силу условия (2.14) оператор $\sum\limits_{i=1}^{N} A_i$ — нормальный. $\square$

Замечание 2.2. Условие (2.14) означает, что для каждого $x \in Q$ и $i, j = 1, \dots, N$ верна по крайней мере одна из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i g_j^{-1}(x) = g_i^{-1} g_j(x), \\ g_j g_i^{-1}(x) = g_j^{-1} g_i(x), \end{cases} \qquad (2.15) \qquad\qquad \begin{cases} g_i g_j^{-1}(x) = g_j^{-1} g_i(x), \\ g_j g_i^{-1}(x) = g_i^{-1} g_j(x). \end{cases} \qquad (2.16)$$

Пусть система (2.15) выполнена при некотором $x \in Q$. Поскольку преобразования g_i и g_j взаимно однозначны и $g_i(Q) = g_j(Q) = Q$, получим: $g_i g_j^{-1}(x) = g_i^{-1} g_j(x)$; $g_i^2 g_j^{-1}(x) = g_j(x)$; $g_j g_i^{-2}(y) = g_j^{-1}(y)$, где $y = g_j(x)$; $g_i^{-2}(y) = g_j^{-2}(y)$; в итоге $g_i^2(z) = g_j^2(z)$, $z = g_j^{-2}(y) = g_j^{-1}(x)$.

Аналогично, если система (2.16) выполнена при некотором $x \in Q$, получим: $g_i g_j^{-1}(x) = g_j^{-1} g_i(x)$; $g_j g_i g_j^{-1}(x) = g_i(x)$; $g_j g_i^{-1} g_j^{-1}(y) = g_i^{-1}(y)$, где $y = g_i(x)$; $g_i^{-1} g_j^{-1}(y) = g_j^{-1} g_i^{-1}(y)$; в итоге $g_i g_j(z) = g_j g_i(z)$, $z = g_j^{-1} g_i^{-1}(y) = g_j^{-1}(x)$.

Таким образом, условие (2.14) означает, что при каждом $x \in Q$ и $i, j = 1, \dots, N$ выполнено по крайней мере одно из равенств

$$g_i^2(x) = g_j^2(x), \quad g_i g_j(x) = g_j g_i(x).$$

$\square$

Пример 2.3. Рассмотрим пример оператора $A_1 + \ldots + A_N$, который не является нормальным, так как преобразования $g_1, \ldots, g_N$ не удовлетворяют условию (2.14) леммы 2.3. Положим $N = 2$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}$ и рассмотрим преобразования g_1 и g_2, которые являются преобразованиями поворота вокруг осей x_1 и x_2 соответственно:

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi = \psi = \pi/3$ и выберем точку $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$. Получим (рис. 2.1):

$$g_2^{-1} g_1(x^0) = g_2^{-1}(0,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/4,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/4)^T,$$
$$g_1 g_2^{-1}(x^0) = g_1(\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/2,\ -\sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$g_1^{-1} g_2(x^0) = g_1^{-1}(-\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$g_2 g_1^{-1}(x^0) = g_2(0,\ \sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/4,\ \sqrt{3}/2,\ 1/4)^T.$$

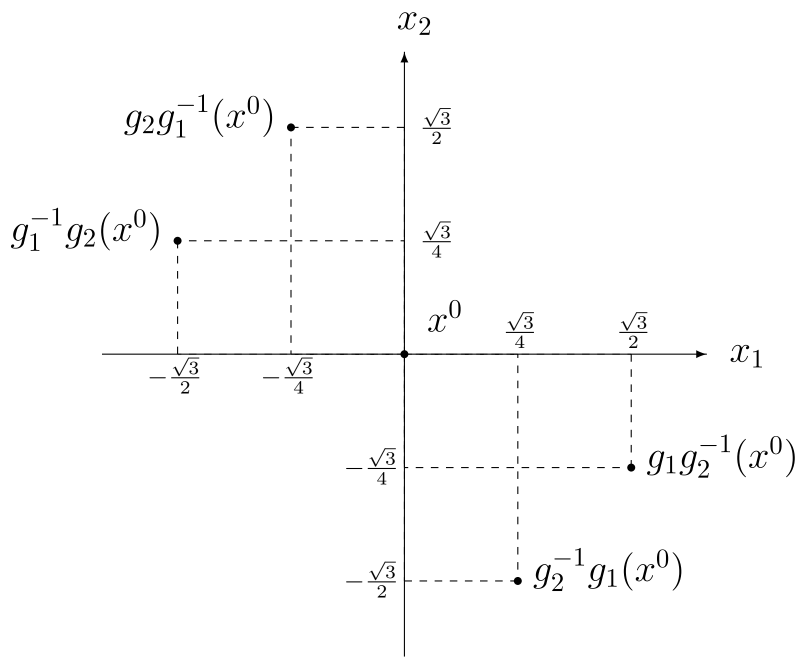

Рис. 2.1

Выполнены все условия леммы 2.3, кроме условия (2.14). Как было показано в доказательстве леммы 2.3, нормальность оператора $A_1 + A_2$

эквивалентна равенству

$$v(g_2^{-1}g_1(x)) + v(g_1^{-1}g_2(x)) = v(g_2g_1^{-1}(x)) + v(g_1g_2^{-1}(x)) \tag{2.17}$$

для всех $v \in L_2(Q)$ при почти всех $x \in Q$. Выберем достаточно малую окрестность $U_\delta(x^0)$ и функцию ξ такую, что $\operatorname{supp}\xi \subset g_2^{-1}g_1(U_\delta(x^0))$. Очевидно, функция ξ не удовлетворяет равенству (2.17) при $x \in U_\delta(x^0)$. Следовательно, оператор $A_1 + A_2$ не является нормальным.

Отметим, что рассмотренные g_1 и g_2 — некоммутирующие ортогональные преобразования. Доказывая лемму 2.5, мы покажем, что для ортогональных преобразований условие (2.14) эквивалентно коммутативности этих преобразований. □

2.5. Доказательство теоремы 2.1

Лемма 2.4. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$. *Если оператор* A — *нормальный и выполнены условия* 2.1 *и* 2.2, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.18}$$

где K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, N$.

Доказательство. Получим формулу (2.18) для преобразования g_1 (преобразования g_i, $i = 2, \ldots, N$, рассматриваются аналогично). По определению множества $G^m_{g_i}$, $m = 1, 2$, открытые и $G^2_{g_i} \subseteq G^1_{g_i}$, $i = 1, \ldots, N$. Выберем точку $x^0 \in G^2_{g_1}$. Из определения множества $G^2_{g_1}$ при $x = x^0$ вытекают следующие неравенства:

$$g_1(x) \neq x, \qquad (A1) \qquad\qquad g_1^2(x) \neq x. \qquad (A2)$$

Поскольку $g_i(Q) = Q$, очевидно, что $g_i(\widetilde{G}^2_{g_i}) = \widetilde{G}^2_{g_i}$, откуда $g_i(G^2_{g_i}) = G^2_{g_i}$, $i = 1, \ldots, N$. Обозначим $B_\delta(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \delta\}$. Выберем $\delta > 0$ такое, что $\overline{B_{2\delta}(x^0)} \subset G^2_{g_1}$ и выполнены следующие условия:

$$B_{2\delta}(x^0) \cap g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B1) \qquad B_{2\delta}(x^0) \cap g_1^2(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \quad (B2)$$

1. Предположим, что при $x = x^0$ и $i, j = 2, \ldots, N$ $(i \neq j)$ выполнены следующие неравенства:

$$g_i(x) \neq x, \quad (A3_i) \qquad g_1(x) \neq g_i(x), \quad (A4_i)$$

$$g_1(x) \neq g_i^{-1}(x), \quad (A5_i) \qquad g_1^2(x) \neq g_i(x), \quad (A6_i)$$

$$g_1(x) \neq g_i g_1(x), \quad (A7_i) \qquad g_1^{-1}(x) \neq g_i^{-1} g_1(x), \quad (A8_i)$$

$$g_i(x) \neq g_j g_1(x), \quad (A9_{ij}) \qquad g_i^{-1}(x) \neq g_j^{-1} g_1(x). \quad (A10_{ij})$$

Вследствие непрерывности преобразований g_i, $i = 1, \ldots, N$, можно выбрать $\delta > 0$ достаточно малым, чтобы при $i, j = 2, \ldots, N$ $(i \neq j)$ удовлетворялись следующие условия:

$$B_{2\delta}(x^0) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B3_i)$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B4_i)$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B5_i)$$

$$g_1^2(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B6_i)$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B7_i)$$

$$g_1^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i^{-1} g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \quad (B8_i)$$

$$g_i(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_j g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B9_{ij})$$

$$g_i^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_j^{-1} g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \quad (B10_{ij})$$

Далее применим подход, использованный в работе [27]. Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при

$x \in g_1(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp}\xi \subset g_1(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — некоторый полином. По определению $g_1, \dots, g_N$ очевидно, что $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ и $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Используя определение функции ξ и учитывая соотношения $\operatorname{supp}(A_i u) = g_i^{-1}(\operatorname{supp} u)$ и $\operatorname{supp}(A_i^* u) = g_i(\operatorname{supp} u)$, $i = 1, \dots, N$, при $x \in B_\delta(x^0)$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, мы получим:

$$
\begin{array}{lll}
A_1A_1^*u(x) = 0, & A_1^*A_1u(x) = 0 & \text{из условия } (B1);\\
A_iA_i^*u(x) = 0, & A_i^*A_iu(x) = 0 & \text{из условия } (B1);\\
A_0A_1^*u(x) = 0, & A_1^*A_0u(x) = 0 & \text{из условия } (B2);\\
A_0A_iu(x) = 0, & A_iA_0u(x) = 0 & \text{из условия } (B4_i);\\
A_0A_i^*u(x) = 0, & A_i^*A_0u(x) = 0 & \text{из условия } (B5_i);\\
 & A_1A_i^*u(x) = 0 & \text{из условия } (B7_i);\\
 & A_1^*A_iu(x) = 0 & \text{из условия } (B8_i);\\
 & A_iA_1^*u(x) = 0 & \text{из условия } (B6_i);\\
 & A_i^*A_1u(x) = 0 & \text{из условия } (B3_i);\\
 & A_iA_j^*u(x) = 0 & \text{из условия } (B9_{ij});\\
 & A_i^*A_ju(x) = 0 & \text{из условия } (B10_{ij}).
\end{array}
$$

Так как оператор A нормальный, мы имеем $AA^*u = A^*Au$. Отсюда

$$A_0A_1u(x) = A_1A_0u(x), \quad x \in B_\delta(x^0).$$

Следовательно,

$$\Delta u(g_1(x)) = (\Delta u)(g_1(x)), \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{2.19}$$

Дифференцируя сложную функцию $u(g_1(x))$, из уравнения (2.19) мы получим при $x \in B_\delta(x^0)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2 u(g_1(x))}{\partial g_{1r} \partial g_{1s}} \frac{\partial g_{1r}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g_{1s}(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial u(g_1(x))}{\partial g_{1r}} \frac{\partial^2 g_{1r}(x)}{\partial {x_i}^2} = \\ = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 u(g_1(x))}{\partial {g_{1r}}^2}. \tag{2.20}$$

Положим $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, где $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Тогда из равенства (2.20) при $x = x^B$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{1k}(x^B)}{\partial x_i} \right)^2 = 1, \quad k = m = 1, \ldots, n, \tag{2.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1k}(x^B)}{\partial x_i} \frac{\partial g_{1m}(x^B)}{\partial x_i} = 0, \quad k, m = 1, \ldots, n, \quad k \neq m. \tag{2.22}$$

Равенства (2.21) и (2.22) можно записать в матричном виде:

$$J_{g_1}(x^B) J_{g_1}^T(x^B) = E. \tag{2.23}$$

Следовательно,

$$J_{g_1}^T(x^B) J_{g_1}(x^B) = E. \tag{2.24}$$

Запишем равенство (2.24) в координатном виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x^B)}{\partial x_k} \frac{\partial g_{1i}(x^B)}{\partial x_m} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \qquad k, m = 1, \ldots, n. \tag{2.25}$$

Поскольку точка $x^B \in B_\delta(x^0)$ выбрана произвольно, получим (2.25) для всех $x \in B_\delta(x^0)$. Дифференцируя (2.25) по x_l, $l = 1, \ldots, n$, для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_l \partial x_m} = 0. \tag{2.26}$$

Циклически переставляя индексы k, l и m в равенстве (2.26), для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_m \partial x_k} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \tag{2.27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_l \partial x_m} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_l} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_m \partial x_k} = 0. \tag{2.28}$$

Складывая равенства (2.26) и (2.27) и вычитая равенство (2.28), для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m} = 0, \quad k, l, m = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, при любых фиксированных k, l и $x \in B_\delta(x^0)$ мы получили однородную систему линейных алгебраических уравнений с детерминантом $\det J_{g_1}(x) \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad i,k,l = 1,\ldots,n, \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{2.29}$$

Следовательно, $g_{1i}(x)$, $i = 1\ldots,n$ являются линейными функциями переменных $x_1,\ldots,x_n$ в $B_\delta(x^0)$, т. е.

$$g_1(x) = K_1^{x^0} x + b_1^{x^0}, \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{2.30}$$

В силу равенства (2.23) матрица $K_1^{x^0}$ ортогональная.

Теперь рассмотрим различные случаи, когда нарушаются неравенства ($A3_i$)–($A8_i$), ($A9_{ij}$) и ($A10_{ij}$), $i,j = 2,\ldots,N$ ($i \neq j$). Они обращаются в равенства, а поскольку преобразования g_i, $i = 1,\ldots,N$ — гладкие, такие равенства имеют место на замкнутых множествах. Для каждой граничной точки таких множеств можно построить последовательность внешних точек, имеющую предел в граничной точке. Переходя к пределу, распространим формулу (2.30) на все такие граничные точки. Поэтому ниже мы рассмотрим случаи, когда неравенства ($A3_i$)–($A8_i$), ($A9_{ij}$) и ($A10_{ij}$), $i,j = 2,\ldots,N$ ($i \neq j$), нарушаются на замкнутых множествах с непустой внутренностью. Неравенства ($A1$), ($A2$) и условия ($B1$), ($B2$) остаются верными во всех рассмотренных ниже случаях.

2. Пусть некоторые из неравенств ($A3_i$), $i = 2,\ldots,N$, нарушаются в окрестности точки $x^0 \in G^2_{g_1}$:

$$g_i(x) = x \;\; \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_3 \subseteq \{2,\ldots,N\}, \;\; \mathcal{K}_3 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A3}$}$$

причем для любых $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ выполняются неравенства ($A3_i$) при $i \notin \mathcal{K}_3$, а неравенства ($A4_i$)–($A8_i$), ($A9_{ij}$) и ($A10_{ij}$), $i,j = 2,\ldots,N$ ($i \neq j$), остаются верными. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия ($B3_i$), $i \notin \mathcal{K}_3$, ($B4_i$)–($B8_i$), ($A9_{ij}$) и ($A10_{ij}$),

$i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Условия $(B3_i)$, $i \in \mathcal{K}_3$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Поскольку условия $(B3_i)$, $i \in \mathcal{K}_3$, нарушены, при $x \in B_\delta(x^0)$ мы имеем

$$A_i^* A_1 u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_3.$$

Учитывая $(\overline{A3})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_i^* A_1 u(x) = a_1 a_i |J_{g_i^{-1}}(x)| u(g_1 g_i^{-1}(x)) = a_1 a_i u(g_1(x)), \quad i \in \mathcal{K}_3. \tag{2.31}$$

Поскольку оператор A нормальный, так же как в пункте 1 доказательства при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_1 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_3} A_i^* A_1 u(x) = A_1 A_0 u(x). \tag{2.32}$$

Пусть $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, где $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. При $x \in B_\delta(x^0)$ и $k, m = 1, \dots, n$ получим

$$u(g_1(x)) = (g_{1k}(x) - g_{1k}(x^B))(g_{1m}(x) - g_{1m}(x^B)),$$

$$\big[u(g_1(x))\big]_{x_i} = g_{1kx_i}(x)(g_{1m}(x) - g_{1m}(x^B)) + g_{1mx_i}(x)(g_{1k}(x) - g_{1k}(x^B)),$$

откуда

$$u(g_1(x))\Big|_{x=x^B} = \big[u(g_1(x))\big]_{x_i}\Big|_{x=x^B} = 0. \tag{2.33}$$

Из равенств (2.31) и (2.33) получим

$$A_i^* A_1 u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad i \in \mathcal{K}_3.$$

Тогда из уравнения (2.32) вытекает, что

$$A_0 A_1 u(x)\big|_{x=x^B} = A_1 A_0 u(x)\big|_{x=x^B}. \tag{2.34}$$

В силу уравнения (2.20) из (2.34) получим соотношения (2.21) и (2.22). Тогда равенства (2.29) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (2.30) остается верным.

3. Пусть некоторые из неравенств $(A4_i)$, $i = 2, \dots, N$, нарушаются в окрестности точки $x^0 \in G^2_{g_1}$:

$$g_1(x) = g_i(x) \ \ \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_4 \subseteq \{2, \dots, N\}, \ \ \mathcal{K}_4 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A4}$}$$

причем для любых $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ выполняются неравенства $(A4_i)$ при $i \notin \mathcal{K}_4$, а неравенства $(A3_i)$, $(A5_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, остаются верными. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия $(B4_i)$, $i \notin \mathcal{K}_4$, $(B3_i)$, $(B5_i)$–$(B8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Условия $(B4_i)$, $i \in \mathcal{K}_4$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ на области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Поскольку условия $(B4_i)$, $i \in \mathcal{K}_4$, нарушены, при $x \in B_\delta(x^0)$ мы имеем

$$A_0 A_i u(x) \neq 0, \quad A_i A_0 u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_4.$$

Учитывая $(\overline{A4})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ и $i \in \mathcal{K}_4$ получим

$$A_0 A_i u(x) = a_i \Delta u(g_i(x)) = a_i \Delta u(g_1(x)),$$
$$A_i A_0 u(x) = a_i (\Delta u)(g_i(x)) = a_i (\Delta u)(g_1(x)).$$

Поскольку оператор A нормальный, так же как в пункте 1 доказательства при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_1 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} A_0 A_i u(x) = A_1 A_0 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} A_i A_0 u(x),$$

откуда

$$\left(a_1 + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \right) \Delta u(g(x)) = \left(a_1 + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \right) (\Delta u)(g(x)).$$

Так как $1 \notin \mathcal{K}_4$, в силу условия 2.1 получим $a_1 + \sum\limits_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \neq 0$. Поэтому имеет место уравнение (2.19). Тогда мы получим формулу (2.30) так же, как в пункте 1 доказательства.

4. В силу условия 2.2 ни одно из неравенств $(A5_i)$, $i = 2, \ldots, N$, не может нарушаться на множестве с непустой внутренностью, поэтому следующее свойство не имеет места:

$$g_1(x) = g_i^{-1}(x) \ \ \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G_{g_1}^2, \quad i \in \mathcal{K}_5 \subseteq \{2, \ldots, N\}, \ \ \mathcal{K}_5 \neq \varnothing. \tag{$\overline{A5}$}$$

5. Случаи нарушения остальных неравенств рассматриваются так же, как в пункте 2 доказательства. Действительно, пусть при $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G_{g_1}^2$ имеет место одно из следующих свойств:

$$g_1^2(x) = g_i(x), \qquad i \in \mathcal{K}_6 \subseteq \{2, \ldots, N\}, \quad \mathcal{K}_6 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A6}$}$$

$$g_1(x) = g_i g_1(x), \qquad i \in \mathcal{K}_7 \subseteq \{2, \ldots, N\}, \quad \mathcal{K}_7 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A7}$}$$

$$g_1^{-1}(x) = g_i^{-1} g_1(x), \quad i \in \mathcal{K}_8 \subseteq \{2, \ldots, N\}, \quad \mathcal{K}_8 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A8}$}$$

$$g_i(x) = g_j g_1(x), \qquad (i,j) \in \mathcal{K}_9 \subseteq \{2, \ldots, N\} \times \{2, \ldots, N\}, \ \ i \neq j, \ \ \mathcal{K}_9 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A9}$}$$

$$g_i^{-1}(x) = g_j^{-1} g_1(x), \ \ (i,j) \in \mathcal{K}_{10} \subseteq \{2, \ldots, N\} \times \{2, \ldots, N\}, \ i \neq j, \ \mathcal{K}_{10} \neq \varnothing. \tag{$\overline{A10}$}$$

Другими словами, неравенства $(A6_i)$, $i \in \mathcal{K}_6$, или $(A7_i)$, $i \in \mathcal{K}_7$, или $(A8_i)$, $i \in \mathcal{K}_8$, или $(A9_{ij})$, $(i,j) \in \mathcal{K}_9$, или $(A10_{ij})$, $(i,j) \in \mathcal{K}_{10}$, нарушены при $x \in B_{2\delta}(x^0)$, причем остальные неравенства из $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \ldots, N$ $(i \neq j)$, остаются верными при $x \in B_{2\delta}(x^0)$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, которое удовлетворяет тем условиям $(B3_i)$–$(B8_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$, для которых соответствующие неравенства $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ остаются верными при $x \in B_{2\delta}(x^0)$. Введем срезающую функцию ξ на области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m -$

$g_{1m}(x^B))$, а $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. При $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\text{в случае } (\overline{A6}): \quad A_i A_1^* u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_6;$$
$$\text{в случае } (\overline{A7}): \quad A_1 A_i^* u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_7;$$
$$\text{в случае } (\overline{A8}): \quad A_1^* A_i u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_8;$$
$$\text{в случае } (\overline{A9}): \quad A_i A_j^* u(x) \neq 0, \quad (i,j) \in \mathcal{K}_9;$$
$$\text{в случае } (\overline{A10}): \quad A_i^* A_j u(x) \neq 0, \quad (i,j) \in \mathcal{K}_{10}.$$

Применяя лемму 2.1 и свойства $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим в случае $(\overline{A6})$, $i \in \mathcal{K}_6$:

$$A_i A_1^* u(x) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(g_i(x))| u(g_1^{-1} g_i(x)) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(g_i(x))| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A7})$, $i \in \mathcal{K}_7$:

$$A_1 A_i^* u(x) = a_1 a_i |J_{g_i^{-1}}(g_1(x))| u(g_i^{-1} g_1(x)) = a_1 a_i |J_{g_i^{-1}}(g_1(x))| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A8})$, $i \in \mathcal{K}_8$:

$$A_1^* A_i u(x) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(x)| u(g_i g_1^{-1}(x)) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(x)| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A9})$, $(i,j) \in \mathcal{K}_9$:

$$A_i A_j^* u(x) = a_i a_j |J_{g_j^{-1}}(g_i(x))| u(g_j^{-1} g_i(x)) = a_i a_j |J_{g_j^{-1}}(g_i(x))| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A10})$, $(i,j) \in \mathcal{K}_{10}$:

$$A_i^* A_j u(x) = a_i a_j |J_{g_i^{-1}}(x)| u(g_j g_i^{-1}(x)) = a_i a_j |J_{g_i^{-1}}(x)| u(g_1(x)).$$

Используя равенства (2.33), отсюда получим

$$\begin{cases} A_i A_1^* u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \ \ i \in \mathcal{K}_6; \quad A_1 A_i^* u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \ \ i \in \mathcal{K}_7; \\ A_1^* A_i u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \ \ i \in \mathcal{K}_8; \quad A_i A_j^* u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \ \ (i,j) \in \mathcal{K}_9; \\ A_i^* A_j u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad (i,j) \in \mathcal{K}_{10}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Поскольку оператор A нормальный, таким же образом как в пункте 1 доказательства при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\text{в случае } (\overline{A6}): \quad A_0A_1u(x) = \sum_{i\in\mathcal{K}_6} A_iA_1^*u(x) + A_1A_0u(x);$$

$$\text{в случае } (\overline{A7}): \quad A_0A_1u(x) = \sum_{i\in\mathcal{K}_7} A_1A_i^*u(x) + A_1A_0u(x);$$

$$\text{в случае } (\overline{A8}): \quad A_0A_1u(x) + \sum_{i\in\mathcal{K}_8} A_1^*A_iu(x) = A_1A_0u(x);$$

$$\text{в случае } (\overline{A9}): \quad A_0A_1u(x) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{K}_9} A_iA_j^*u(x) + A_1A_0u(x);$$

$$\text{в случае } (\overline{A10}): \quad A_0A_1u(x) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{K}_{10}} A_i^*A_ju(x) = A_1A_0u(x).$$

Учитывая (2.35), в любом из случаев $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$ мы получим (2.34). В силу уравнения (2.20) из (2.34) получим соотношения (2.21) и (2.22). Тогда равенства (2.29) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (2.30) остается верным.

6. Пусть при всех $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ имеет место некоторая комбинация свойств $(\overline{A3})$, $(\overline{A4})$ и $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$. Свойство $(\overline{A5})$ не выполняется, как было доказано в пункте 4 доказательства. В этом случае, объединяя пункты 2, 3 и 5 доказательства, аналогично получим равенство (2.34). В силу уравнения (2.20) из (2.34) получим соотношения (2.21) и (2.22). Тогда равенства (2.29) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (2.30) остается верным.

Следовательно, преобразование g_1 имеет вид (2.30) в окрестности любой точки $x^0 \in G^2_{g_1}$.

7. В пунктах 1–6 доказательства было показано, что при выполнении условий леммы представление (2.30) имеет место в $B_\delta(x^0) \subset G^2_{g_1}$ без дополнительных ограничений. Поскольку точка $x^0 \in G^2_{g_1}$ произвольна, получим

$$g_1(x) = K_{1j}x + b_{1j}, \quad x \in G^{2j}_{g_1}, \tag{2.36}$$

где $G_{g_1}^{2j}$ — открытая связная компонента множества $G_{g_1}^2$.

Из $g_1(Q) = Q$ по определению множества $G_{g_1}^2$ вытекает $g_1(G_{g_1}^2) = G_{g_1}^2$. Следовательно, если $x \in G_{g_1}^{2j}$, то $g_1(x) \in G_{g_1}^{2m}$ для некоторого $m = m(j)$. Кроме того, поскольку множество $G_{g_1}^{2j}$ связно, индекс m не зависит от x. Таким образом,

$$g_1^2(x) = K_{1m}K_{1j}x + K_{1m}b_{1j} + b_{1m}, \quad x \in G_{g_1}^{2j}. \tag{2.37}$$

Сначала предположим, что $G_{g_1}^2 = Q$. Тогда j принимает единственное значение $j=1$. Предположим, что $K_{1,1}^2=E$. Тогда $g_1^2(x)=x+K_{1,1}b_{1,1}+b_{1,1}$ при $x \in Q$. Отсюда $K_{1,1}b_{1,1} + b_{1,1} = 0$. Следовательно, $g_1^2(x) = x$ при $x \in Q$. Это противоречит условию $G_{g_1}^2 = Q$. Таким образом, если $G_{g_1}^2 = Q$, то $g_1(x)$ имеет вид (2.18), где $K_1 = K_{1,1}$ и $K_1^2 \neq E$.

Теперь предположим, что $\widetilde{G}_{g_1}^2 \neq \varnothing$. Тогда $\partial G_{g_1}^2 \cap Q = \partial \widetilde{G}_{g_1}^2 \cap Q$. Рассмотрим множество $\partial G_{g_1}^2 \cap Q$. Выберем точку $z \in \partial G_{g_1}^{2j} \cap Q$. Переходя в равенстве (2.37) к пределу при $x \to z$ ($x \in G_{g_1}^{2j}$), получим

$$K_{1m}K_{1j}z + K_{1m}b_{1j} + b_{1m} = z. \tag{2.38}$$

Если $K_{1m}K_{1j} = E$, то $K_{1m}b_{1j} + b_{1m} = 0$. Отсюда $g_1^2(x) = x$ при $x \in G_{g_1}^{2j}$. Это противоречит определению множества $G_{g_1}^{2j}$. Следовательно, множество $\partial G_{g_1}^{2j} \cap Q$ принадлежит гиперплоскости размерности $r \leqslant n-1$, где r — кратность собственного значения $\lambda = 1$ матрицы $K_{1m}K_{1j} \neq E$. (В случае $r = n$ мы получили бы $K_{1m}K_{1j} = E$, поскольку матрица $K_{1m}K_{1j}$ ортогональна.) Если $\lambda = 1$ не является собственным значением матрицы $K_{1m}K_{1j}$, то множество $\partial G_{g_1}^{2j} \cap Q$ состоит из одной точки. Согласно исходному предположению, $g_1 \in C^3$. С другой стороны, $g_1^2(x)$ — кусочно-аффинная функция в Q. Следовательно, $\widetilde{G}_{g_1}^2 \subseteq \partial G_{g_1}^2$. Таким образом, $g_1(x)$ также является кусочно-аффинной функцией в Q. Следовательно, $g_1(x)$ имеет вид (2.18) при всех $x \in Q$. Более того, поскольку $K_{1j} = K_{1m} = K_1$, получим, что $r \leqslant n-2$ и множество $G^2_{g_1}$ состоит из одной компоненты связности[1]. $\square$

Пример 2.4. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 2.2 существенно в лемме 2.4. При $N = 2$ рассмотрим оператор $A = A_0 + A_1 + A_2$. Положим $a_1 = a_2 = a$. Выберем взаимно однозначное преобразование g_1 такое, что $g_1(Q) = Q$ и $|J_{g_1}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Тогда $|J_{g_1^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Положим $g_2(x) \equiv g_1^{-1}(x)$, $x \in Q$. Тогда $g_2(Q) = Q$ и $|J_{g_2}(x)| \equiv |J_{g_2^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Применяя лемму 2.1, для любых $v \in \mathcal{D}(A)$ и почти всех $x \in Q$ мы получим

$$\begin{aligned} A^*v(x) &= A_0^*v(x) + A_1^*v(x) + A_2^*v(x) = \\ &= \Delta v(x) + a|J_{g_1^{-1}}(x)|v(g_1^{-1}(x)) + a|J_{g_2^{-1}}(x)|v(g_2^{-1}(x) = \\ &= \Delta v(x) + av(g_2(x)) + av(g_1(x)) = Av(x). \end{aligned}$$

Оператор A является самосопряженным, следовательно, нормальным. Покажем, что существуют преобразования g_1 и g_2, не принадлежащие классу (2.18). Действительно, положим $n = 2$ и в единичном шаре $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ рассмотрим преобразование *квазиповорота*

$$g : (r, \varphi) \mapsto (r, \widehat{g}(r, \varphi)),$$

где r и φ — полярные координаты, соответствующие координатам (x_1, x_2). Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

---

[1] Докажем, что $r \leqslant n-2$. Пусть матрица K_1 имеет спектр $\sigma(K_1) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\lambda_i\}$, где $|\lambda_i| = 1$ вследствие ортогональности матрицы. Тогда $\sigma(K_1^2) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\lambda_i^2\}$. Поскольку $K_1^2 \neq E$, $\exists \lambda_s^2 \neq 1$, т. е. $\exists \lambda_s \neq \pm 1$. Это значит, что $\operatorname{Im}\lambda_s \neq 0$, следовательно, $\exists \lambda_m = \overline{\lambda}_s$ (так как K_1 вещественна) и $\lambda_m^2 \neq 1$. Таким образом, существует пара собственных значений матрицы K_1^2, не равных 1, откуда $r \leqslant n-2$.

легко показать, что $|J_g(r,\varphi)| = \left|\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\widehat{g}(r,\varphi)\right|$. Положим
$$\widehat{g}(r,\varphi) = \varphi + r^2.$$
Тогда $|J_g(r,\varphi)| \equiv 1$. Очевидно, что преобразование g взаимно однозначно, $g(Q) = Q$, а обратное преобразование $g^{-1}(x)$ определяется функцией $\widehat{g}(r,\varphi) = \varphi - r^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $g \in C^3$.

Положим $g_1 = g$ и $g_2 = g^{-1}$. Таким образом, преобразования g_1 и $g_2 = g_1^{-1}$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.4, кроме условия 2.2. Они не имеют вид (2.18), несмотря на то что оператор A нормальный. $\square$

Замечание 2.3. Легко доказать, что вводя в примере 2.4 преобразования $g_3, \dots, g_N$ поворота в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие всем условиям леммы 2.4, включая условие 2.2, мы получим нормальный оператор A с преобразованиями g_1 и g_2, построенными в примере 2.4. Это показывает, что и в таком случае условие 2.2 является существенным в лемме 2.4. Более того, мы получим такой же результат для аналогичных преобразований поворота и квазиповорота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Предложение 2.5. *Пусть числа $C_1, \dots, C_N \in \mathbb{R}$ отличны от нуля и удовлетворяют условию* 2.1:
$$\forall \mathcal{K} \subseteq \{1, \dots, N\} \quad \sum_{i \in \mathcal{K}} C_i \neq 0 \quad \textit{при} \quad \mathcal{K} \neq \varnothing. \tag{2.39}$$
Пусть $\overline{Q} \subset V \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывные отображения $f_1, \dots, f_N, h_1, \dots, h_N : V \to V$ такие, что $f_1(Q), \dots, f_N(Q), h_1(Q), \dots, h_N(Q) \subseteq Q$, для любого $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ и любого $x \in Q$ удовлетворяют уравнению
$$\sum_{i=1}^{N} C_i u(f_i(x)) = \sum_{i=1}^{N} C_i u(h_i(x)). \tag{2.40}$$
Тогда:

(1) $\forall x \in Q$ *следующие множества точек совпадают*[2]:

$$\{f_1(x), \dots, f_N(x)\} = \{h_1(x), \dots, h_N(x)\};$$

(2) *если* $f_i(x^0) \neq f_j(x^0)$ *для всех* $i, j = 1, \dots, N$ $(i \neq j)$ *при некотором* $x^0 \in Q$, *то из равенства* $f_m(x^0) = h_l(x^0)$ *следует, что* $C_m = C_l$;

(3) *пусть* $f_m(x^0) = h_l(x^0)$ *при некотором* $x^0 \in Q$. *Тогда*

$$\sum_{i \in \mathcal{K}_f^m} C_i = \sum_{i \in \mathcal{K}_h^l} C_i, \tag{2.41}$$

где

$$\mathcal{K}_f^m = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ f_i(x^0) = f_m(x^0)\},$$
$$\mathcal{K}_h^l = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ h_i(x^0) = h_l(x^0)\}.$$

Доказательство. Первое утверждение не означает, что множества функций $\{f_1, \dots, f_N\}$ и $\{h_1, \dots, h_N\}$ совпадают. Например, первое утверждение выполнено для функций $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = -x_1$ и $h_1(x) = |x_1|$, $h_2(x) = -|x_1|$ при любых $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Предположим, что первое утверждение неверно. Тогда для некоторого $x^0 \in Q$ имеет место $\{f_1(x^0), \dots, f_N(x^0)\} \neq \{h_1(x^0), \dots, h_N(x^0)\}$. Без ограничения общности предположим, что

$$S(x^0) = \{f_1(x^0), \dots, f_N(x^0)\} \setminus \{h_1(x^0), \dots, h_N(x^0)\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим любую точку $f_{k_1}(x^0) \in S(x^0)$. В общем случае $\{k_1\} \subseteq \mathcal{K}_f^{k_1}$, где $\mathcal{K}_f^{k_1} = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ f_i(x^0) = f_{k_1}(x^0)\}$. Пусть $B_\delta(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \delta\}$. Обозначим

$$U_\delta = \bigcup_{i \in \mathcal{K}_f^{k_1}} f_i(B_\delta(x^0)).$$

[2]Если некоторые точки участвуют в записи больше одного раза, то такая запись определяет одно и то же множество, например: $\{1, 1, 2\} = \{2, 2, 1\} = \{1, 2\}$.

Поскольку отображения $f_1, \ldots, f_N$ и $h_1, \ldots, h_N$ непрерывны, существует $\delta > 0$ такое, что $f_i(x) \in S(x)$ для всех $i \in \mathcal{K}_f^{k_1}$ при любом $x \in B_{2\delta}(x^0)$ и

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{i \notin \mathcal{K}_f^{k_1}} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ для любого $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$, и $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = \sum_{i \in \mathcal{K}_f^{k_1}} C_i, \quad C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = 0.$$

В силу условия (2.39) это противоречит уравнению (2.40), откуда следует справедливость первого утверждения.

2. Докажем второе утверждение. Из первого утверждения следует, что если $f_i(x^0) \neq f_j(x^0)$ при некотором $x^0 \in Q$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$, то $h_i(x^0) \neq h_j(x^0)$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$. Рассмотрим некоторую функцию f_m, $1 \leqslant m \leqslant N$. В силу первого утверждения существует единственная функция h_l такая, что $f_m(x^0) = h_l(x^0)$, $1 \leqslant l \leqslant N$. Обозначим $U_\delta = f_m(B_\delta(x^0)) \cup h_l(B_\delta(x^0))$. Поскольку отображения $f_1, \ldots, f_N$ и $h_1, \ldots, h_N$ непрерывны, существует такое число $\delta > 0$, что

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{N} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$ и $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = C_m, \quad C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = C_l.$$

Из равенства (2.40) получим $C_m = C_l$, что доказывает второе утверждение.

3. Третье утверждение является простым обобщением второго. Обозначим

$$U_\delta = \bigcup_{i\in\mathcal{K}_f^m} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \cup \bigcup_{i\in\mathcal{K}_h^l} h_i(B_{2\delta}(x^0)).$$

Выберем $\delta > 0$ достаточно малым, чтобы

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1\\ i\notin\mathcal{K}_f^m}}^N f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1\\ i\notin\mathcal{K}_h^l}}^N h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$ и $\operatorname{supp}\xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = \sum_{i\in\mathcal{K}_f^m} C_i,$$

$$C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = \sum_{i\in\mathcal{K}_h^l} C_i.$$

Из равенства (2.40) получим (2.41), что доказывает третье утверждение.

□

Лемма 2.5. *Пусть* $G_{g_i}^2 \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$. *Если оператор A нормальный и выполнены условия* 2.1, 2.2 *и* 2.3, *то*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x) \quad \forall x \in Q, \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Доказательство. Предположения этой леммы повторяют предположения леммы 2.4 с добавлением условия 2.3.

В силу леммы 2.4 преобразования $g_1, \ldots, g_N$ имеют вид (2.18).

По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Вследствие того что $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$, а преобразования $g_1 \ldots, g_N$ имеют вид (2.18), получим $A_1 u, \ldots, A_N u \in \mathcal{D}(A)$, $A_1^* u, \ldots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [15, теорема 5.1, § 5, гл. 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Вследствие нормальности оператора A для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеем

$$\left(A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i\right)\left(A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i^*\right)u = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i^*\right)\left(A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i\right)u. \quad (2.42)$$

Из соотношений (2.18) следует, что равенства (2.21), (2.22) тождественно выполняются в Q для всех преобразований $g_1, \dots, g_N$. Тогда, записывая равенство (2.20) для каждого преобразования $g_1, \dots, g_N$, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_0 A_i u = A_i A_0 u, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.43)$$

С другой стороны, $g_i^{-1}(y) = K_i^{-1}y - K_i^{-1}b_i$, $i = 1, \dots, N$. Поскольку матрицы K_i^{-1} также ортогональны, из равенств (2.21), (2.22), записанных для обратных преобразований $g_1^{-1}, \dots, g_N^{-1}$, и тождеств $|J_{g_i^{-1}}(x)| \equiv 1$ для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_0 A_i^* u = A_i^* A_0 u, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.44)$$

Учитывая (2.43) и (2.44), из равенства (2.42) для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\right)u = \left(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)u.$$

Применяя лемму 2.1 и тождества $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $i = 1, \dots, N$, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} a_i a_j \big(u(g_i^{-1} g_j(x)) + u(g_j^{-1} g_i(x))\big) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} a_i a_j \big(u(g_i g_j^{-1}(x)) + u(g_j g_i^{-1}(x))\big). \quad (2.45)$$

В терминах предложения 2.5 равенство (2.45) содержит функции $f_1 = g_1^{-1} g_2$, $f_2 = g_2^{-1} g_1$, $\dots$, $f_{N(N-1)} = g_N^{-1} g_{N-1}$ в левой части, функции $h_1 = g_1 g_2^{-1}$, $h_2 = g_2 g_1^{-1}$, $\dots$, $h_{N(N-1)} = g_N g_{N-1}^{-1}$ в правой части и коэффициенты $C_1 = C_2 = a_1 a_2$, $C_3 = C_4 = a_1 a_3$, $\dots$, $C_{N(N-1)-1} = C_{N(N-1)} = a_{N-1} a_N$. Из условия 2.3 следует, что условие (2.39) выполнено. Тогда согласно первому утверждению предложения 2.5 для любого $x \in Q$ имеет место $\{f_1(x), \dots, f_{N(N-1)}(x)\} = \{h_1(x), \dots, h_{N(N-1)}(x)\}$. С другой стороны, в силу условия 2.3 равенство (2.41) выполняется только в случае $p = q$ и $\{C_{m_1}, \dots, C_{m_p}\} = \{C_{l_1}, \dots, C_{l_p}\}$ (в отличие от первого утверждения предложения 2.5, здесь имеется в виду строгое совпадение множеств). Таким образом, для любых $i, j = 1, \dots, N$ и $x \in Q$ верна по крайней мере одна из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i^{-1} g_j(x) = g_i g_j^{-1}(x), \\ g_j^{-1} g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x), \end{cases} \qquad (2.46) \qquad \begin{cases} g_i^{-1} g_j(x) = g_j g_i^{-1}(x), \\ g_j^{-1} g_i(x) = g_i g_j^{-1}(x). \end{cases} \qquad (2.47)$$

Как было показано в замечании 2.2, из системы (2.46) следует $g_i^2(x) = g_j^2(x)$, а из системы (2.47) следует $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$.

Докажем, что для любых $i, j = 1, \dots, N$ по крайней мере одно из равенств $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ и $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ выполнено для всех $x \in Q$. Действительно, поскольку преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (2.18), каждое рассматриваемое равенство в координатной форме является системой линейных уравнений. Решением такой системы является гиперплоскость размерности $n - r$, где r — ранг матрицы системы. Очевидно, что если каждая точка $x \in Q$ является решением хотя бы одной из двух систем линейных уравнений, то одна из этих систем (или обе) имеет матрицу нулевого ранга. Следовательно, хотя бы одно из равенств $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ и $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ выполняется тождественно в Q.

Докажем, что для любых $i, j = 1, \dots, N$ из тождества $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ ($x \in Q$) следует тождество $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ ($x \in Q$). Действительно, поскольку g_i и g_j имеют вид (2.18), из тождества $g_i^2(x) = g_j^2(x)$

$(x \in Q)$ следует $K_i^2 = K_j^2$. Так как матрица K_i^2 ортогональна, она может быть записана в виде $K_i^2 = S_i^{-1} U_i S_i$, где S_i — некоторая ортогональная матрица, $\det S_i \neq 0$, а матрица $U_i = \operatorname{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in})$ — диагональная с собственными значениями матрицы K_i^2 на главной диагонали, причем $|\lambda_{ik}| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Матрица U_i определена с точностью до перестановки диагональных элементов, а матрица S_i определена с точностью до перестановки строк. Положим $Q_i = S_i^{-1} V_i S_i$, где $V_i = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_{i1}}, \sqrt{\lambda_{i2}}, \ldots, \sqrt{\lambda_{in}})$. Очевидно, что $Q_i^2 = K_i^2$ и Q_i — ортогональная матрица, определенная с точностью до выбора одного из пары значений каждого из корней $\sqrt{\lambda_{i1}}, \ldots, \sqrt{\lambda_{in}}$. Докажем, что не существует других ортогональных матриц с квадратами, равными K_i^2. Действительно, предположим, что существует ортогональная матрица P_i такая, что $P_i \neq Q_i$ и $P_i^2 = K_i^2$. Тогда $P_i = T_i^{-1} W_i T_i$, где $W_i = \operatorname{diag}(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \ldots, \mu_{in})$, $|\mu_{ik}| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Отсюда $P_i^2 = T_i^{-1} \operatorname{diag}(\mu_{i1}^2, \mu_{i2}^2, \ldots, \mu_{in}^2) T_i = K_i^2$. Поскольку представление $K_i^2 = S_i^{-1} U_i S_i$ единственно с точностью до перестановки диагональных элементов матрицы U_i и строк матрицы S_i, отсюда следует, что $\{\mu_{i1}^2, \mu_{i2}^2, \ldots, \mu_{in}^2\} = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in}\}$ и матрицы T_i и S_i совпадают с точностью до перестановки строк. Следовательно, $P_i = Q_i$. Таким образом, из равенства $K_i^2 = K_j^2$ следует, что $K_i = S_i^{-1} \operatorname{diag}(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in}) S_i$ и $K_j = S_i^{-1} \operatorname{diag}(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}) S_i$, где $\gamma_{ik}^2 = \delta_{ik}^2 = \lambda_{ik}$, $k = 1, \ldots, n$. Отсюда $K_i K_j = K_j K_i$. Тогда из соотношений (2.18) получим $g_i g_j(x) = g_j g_i(x) + h$ для всех $x \in Q$, где $h = K_i b_j + b_i - (K_j b_i + b_j)$. Поскольку $g_i g_j(Q) = g_j g_i(Q) = Q$, получим $h = 0$ и $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ для всех $x \in Q$. $\square$

Пример 2.5. Преобразованиями вида (2.18), удовлетворяющими тождеству $gf(x) = fg(x)$, являются преобразования поворота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^3$. Тождества $gf(x) = fg(x)$ и $g^2(x) = f^2(x)$ одновременно выполняются для преобразований поворота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^3$ на углы α и $\pi + \alpha$. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. Если преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид* (2.18) *и равенства $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$, $i, j = 1, \dots, N$, выполнены для всех $x \in Q$, то оператор A нормальный.*

Доказательство. По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Следовательно, поскольку $g_i(Q) = Q$ и преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (2.18), получим $A_1 u, \dots, A_N u \in \mathcal{D}(A)$, $A_1^* u, \dots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [15, теорема 5.1, § 5, гл. 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Поскольку преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (2.18), условие (2.13) леммы 2.3 выполняется. Справедливость условия (2.14) леммы 2.3 следует из соотношений $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ для всех $x \in Q$, $i, j = 1, \dots, N$. Тогда в силу леммы 2.3 оператор $A_1 + \ldots + A_N$ нормальный. Следовательно, достаточно доказать, что для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$

$$A_0 \left(\sum_{i=1}^N A_i \right) u + \left(\sum_{i=1}^N A_i^* \right) A_0 u = \left(\sum_{i=1}^N A_i \right) A_0 u + A_0 \left(\sum_{i=1}^N A_i^* \right) u. \quad (2.48)$$

Таким же образом, как в доказательстве леммы 2.5, получим (2.43) и (2.44), откуда следует (2.48). $\square$

Пример 2.6. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 2.1 существенно в лемме 2.4. Выберем числа $a_1, \dots, a_N$ так, что при некотором $\mathcal{K} \subseteq \{1, \dots, N\}$ выполнено $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i = 0$. Рассмотрим преобразования $g_1, \dots, g_N$ такие, что $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. Положим $g_i = g$ для всех $i \in \mathcal{K}$, где $g(x)$ — некоторое *неаффинное* преобразование. В любом случае мы получим

$$Au(x) = \Delta u + \sum_{i \notin \mathcal{K}} a_i u(g_i(x)).$$

Пусть преобразования g_i, $i \notin \mathcal{K}$, имеют вид (2.18) и являются вращениями вокруг одной оси в $\mathbb{R}^n$. Тогда преобразования g_i, $i \notin \mathcal{K}$, удовлетворяют всем условиям леммы 2.6, следовательно, в силу этой леммы оператор A нормальный. Выбирая не равные по модулю углы вращения и подходящее преобразование $g(x)$, добьемся выполнения условия 2.2 в лемме 2.4.

Таким образом, все предположения леммы 2.4, кроме условия 2.1, выполнены, а преобразования $g_i = g$, $i \in \mathcal{K}$, не имеют вид (2.18). $\square$

Пример 2.7. Рассмотрим пример, показывающий, что условие коммутативности преобразований $g_1, \ldots, g_N$ существенно в лемме 2.6. Рассмотрим область Q, оператор A и преобразования g_1 и g_2, введенные в примере 2.3. В таком случае выполняются все условия леммы 2.6, кроме условия коммутативности. Из доказательства леммы 2.6 следует, что нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2$ для любых $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Положим $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)\xi(x)$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})^3$ — срезающая функция такая, что $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$ при $x \in Q_{2\varepsilon}$ и $\xi(x) = 0$ при $x \notin Q_\varepsilon$. (Здесь $Q_\varepsilon \subset Q$, $\operatorname{dist}(\partial Q_\varepsilon, \partial Q) = \varepsilon$.) Очевидно, что $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Поскольку выполняются все условия леммы 2.3, кроме условия (2.14), в силу примера 2.3 получим, что оператор $A_1 + A_2$ нормален тогда и только тогда, когда равенство (2.17) выполнено при почти всех $x \in Q$. Выбирая $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$ и учитывая вычисления из примера 2.3, мы видим, что равенство (2.17) нарушается, по крайней мере, в окрестности точки x^0. Следовательно, при таких условиях оператор A не является нормальным. $\square$

Доказательство теоремы 2.1 следует из лемм 2.4, 2.5 и 2.6.

2.6. Доказательство теоремы 2.2

Лемма 2.7. *Пусть* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, *и если оператор* A *нормальный и выполнено хотя бы одно из условий* 2.1, 2.2, *то*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.49}$$

Доказательство. Так как $G^2_{g_i} = \varnothing$, по лемме 2.2 получим $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$.

Чтобы доказать равенства (2.49), применим метод, использованный в доказательстве леммы 2.4. Приведем доказательство для преобразования g_1 (преобразования $g_2, \dots, g_N$ рассматриваются аналогично). Выберем точку $x^0 \in Q$. Отметим, что поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, имеет место равенство $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$ для всех $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$. Следовательно, свойства $(A3_i)$ и $(A6_i)$ совпадают, так же как и свойства $(A4_i)$ и $(A5_i)$, $(A7_i)$ и $(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$. Обозначим их как $(A3_i{,}A6_i)$, $(A4_i{,}A5_i)$, $(A7_i{,}A8_i)$ и $(A9_{ij}{,}A10_{ij})$.

1. Пусть при $x = x^0$ выполнены условия $(A1)$, $(A3_i{,}A6_i)$, $(A4_i{,}A5_i)$, $(A7_i{,}A8_i)$ и $(A9_{ij}{,}A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Условие $(A2)$ не выполняется, так как $g_i^2(x) \equiv x$, $i = 1, \dots, N$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия $(B1)$, $(B3_i{,}B6_i)$, $(B4_i{,}B5_i)$, $(B7_i{,}B8_i)$ и $(B9_{ij}{,}B10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$.

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g_1(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp} \xi \subset g_1(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Из определения $g_1, \dots, g_N$ следует $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Используя нормальность оператора A (т. е. равенство (2.42)), определение функции u и условия $(B1)$, $(B3_i{,}B6_i)$, $(B4_i{,}B5_i)$, $(B7_i{,}B8_i)$ и $(B9_{ij}{,}B10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, так же как в пункте 1 доказательства леммы 2.4 (с тем отличием, что нарушается условие $(B2)$) для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_1 A_0 u(x) + A_0 A_1^* u(x) = A_0 A_1 u(x) + A_1^* A_0 u(x),$$

где

$$A_1 A_0 u(x) = a_1 (\Delta u)(g_1(x)),$$

$$A_0 A_1 u(x) = a_1 \Delta\big(u(g_1(x))\big),$$

$$A_0 A_1^* u(x) = a_1 \Delta\left(\left|J_{g_1^{-1}}(x)\right| u(g_1^{-1}(x))\right) = a_1 \Delta\left(|J_{g_1}(x)|\, u(g_1(x))\right),$$

$$A_1^* A_0 u(x) = a_1 \left|J_{g_1^{-1}}(x)\right| (\Delta u)(g_1^{-1}(x)) = a_1 |J_{g_1}(x)| (\Delta u)(g_1(x)).$$

Отсюда

$$\Delta\Big(\big(|J_{g_1}(x)| - 1\big) u(g_1(x))\Big) = \big(|J_{g_1}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_1(x)), \quad x \in B_\delta(x^0).$$

Используя формулу

$$\Delta[v(x)w(x)] = \Delta v(x) w(x) + 2(\nabla v(x), \nabla w(x)) + v(x)\Delta w(x),$$

для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\big(|J_{g_1}(x)| - 1\big)\Delta u(g_1(x)) + \sum_{i=1}^{n}\left(2\frac{\partial |J_{g_1}(x)|}{\partial x_i}\frac{\partial u(g_1(x))}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 |J_{g_1}(x)|}{\partial x_i^2} u(g_1(x))\right) = $$
$$= \big(|J_{g_1}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_1(x)).$$

Пусть $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, где $k, m = 1, \ldots, n$ и $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Учитывая равенства (2.33), получим

$$\Big(\big(|J_{g_1}(x)| - 1\big)\Delta u(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B} = \Big(\big(|J_{g_1}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B}. \quad (2.50)$$

Следовательно, имеет место либо $|J_{g_1}(x^B)| = 1$, либо

$$\Delta u(g_1(x))\Big|_{x=x^B} = (\Delta u)(g_1(x))\Big|_{x=x^B}.$$

Поскольку точка $x^B \in B_\delta(x^0)$ произвольна, в первом случае мы получим

$$|J_{g_1}(x)| = 1 \quad \forall x \in B_\delta(x^0). \quad (2.51)$$

Во втором случае, используя равенство (2.20), получим (2.21) и (2.22). Тогда из (2.23) получим (2.51) так же, как в пункте 1 доказательства леммы 2.4.

2. Как было указано в доказательстве леммы 2.4, вследствие того что $|J_{g_1}(x)| \in C^2(\overline{Q})$ достаточно рассмотреть случаи, когда условия ($A1$), ($A3_i$,$A6_i$), ($A4_i$,$A5_i$), ($A7_i$,$A8_i$) и ($A9_{ij}$,$A10_{ij}$) нарушаются на множествах с непустой внутренностью.

Прежде всего отметим, что если условие ($A1$) нарушается для любого $x \in B_\delta(x^0)$, т. е. $g_1(x) = x$ в $B_\delta(x^0)$, то равенство (2.51) выполняется тривиальным образом.

3. Если выполнено условие 2.2, то условия ($A4_i$,$A5_i$), $i = 2, \ldots, N$, не могут нарушаться на множествах с непустой внутренностью.

Пусть выполнено условие 2.1 и некоторые из условий ($A4_i$,$A5_i$), $i = 2, \ldots, N$, нарушаются в окрестности точки x^0:

$$\begin{cases} g_1(x) = g_i(x), \\ g_1(x) = g_i^{-1}(x) \end{cases} \quad \forall x \in B_{2\delta}(x^0), \;\; i \in \mathcal{K}_{45} \subseteq \{2, \ldots, N\}, \;\; \mathcal{K}_{45} \neq \varnothing, \tag{$\overline{A4, A5}$}$$

причем остальные условия ($A4_i$,$A5_i$), $i \notin \mathcal{K}_{45}$, выполняются при $x \in B_{2\delta}(x^0)$, а условия ($A1$), ($A3_i$,$A6_i$), ($A7_i$,$A8_i$) и ($A9_{ij}$,$A10_{ij}$), $i, j = 2, \ldots, N$ ($i \neq j$), сохраняются. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия ($B1$), ($B4_i$,$B5_i$), $i \notin \mathcal{K}_{45}$, ($B3_i$,$B6_i$), ($B7_i$,$B8_i$) и ($B9_{ij}$,$B10_{ij}$), $i, j = 2, \ldots, N$ ($i \neq j$). Условия ($B4_i$,$B5_i$), $i \in \mathcal{K}_{45}$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$ и $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Поскольку нарушены условия ($B4_i$,$B5_i$), $i \in \mathcal{K}_{45}$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_i u(x) \neq 0, \quad A_i A_0 u(x) \neq 0, \quad A_0 A_i^* u(x) \neq 0, \quad A_i^* A_0 u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_{45}.$$

Учитывая соотношения ($\overline{A4,A5}$), при $i \in \mathcal{K}_{45}$ для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_i u(x) = a_i \Delta u(g_i(x)) = a_i \Delta u(g_1(x)),$$
$$A_i A_0 u(x) = a_i (\Delta u)(g_i(x)) = a_i (\Delta u)(g_1(x)),$$

$$A_0 A_i^* u(x) = a_i \Delta \left(\left| J_{g_i^{-1}(x)} \right| u(g_i^{-1}(x)) \right) = a_i \Delta(|J_{g_1(x)}| u(g_1(x))),$$
$$A_i^* A_0 u(x) = a_i \left| J_{g_i^{-1}(x)} \right| (\Delta u)(g_i^{-1}(x)) = a_i |J_{g_1(x)}| (\Delta u)(g_1(x)).$$

Поскольку оператор A нормальный, так же как в пункте 1 доказательства при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} (A_0 A_i u(x) + A_0 A_i^* u(x)) = \sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} (A_i A_0 u(x) + A_i^* A_0 u(x)).$$

Преобразуя это уравнение так же, как в пункте 1 доказательства, учитывая предыдущие соотношения и (2.33), получим

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} a_i \right) \Big(\big(|J_{g_1}(x)| - 1 \big) \Delta u(g_1(x)) \Big) \Big|_{x=x^B} =$$
$$= \left(\sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} a_i \right) \Big(\big(|J_{g_1}(x)| - 1 \big) (\Delta u)(g_1(x)) \Big) \Big|_{x=x^B}.$$

Поскольку $1 \notin \mathcal{K}_{45}$, в силу условия 2.1 получим равенство (2.50). Тогда равенство (2.51) следует аналогичным образом.

4. Если условия ($A3_i$,$A6_i$), ($A7_i$,$A8_i$) и ($A9_{ij}$,$A10_{ij}$) нарушаются в некоторой комбинации, то такой случай рассматривается так же, как в пунктах 5, 6 доказательства леммы 2.4. Единственное отличие в том, что теперь условие ($B2$) не выполняется. В результате, используя соотношения (2.33), мы получим

$$(A_1 A_0 u(x) + A_0 A_1^* u(x))\big|_{x=x^B} = (A_0 A_1 u(x) + A_1^* A_0 u(x))\big|_{x=x^B},$$

откуда получим равенство (2.50) и, следовательно, (2.51).

Таким образом, имеет место $|J_{g_1}(x)| = 1$ при почти всех $x \in Q$. Поскольку $|J_{g_1}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, получим $|J_{g_1}(x)| = 1$ для любого $x \in Q$. $\square$

Лемма 2.8. *Пусть $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \ldots, N$. Если*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \ldots, N,$$

то оператор A самосопряженный.

Доказательство. Из предположений леммы следует, что $g_i(x) = g_i^{-1}(x)$, $x \in Q$, $i = 1, \ldots, N$. С помощью леммы 2.1 получим, что $A_i = A_i^*$, $i = 1, \ldots, N$. Поскольку оператор A_0 самосопряженный, то оператор A также самосопряженный. В частности, оператор A является нормальным. $\square$

Доказательство теоремы 2.2 следует из лемм 2.7 и 2.8.

2.7. Доказательство теоремы 2.3

Лемма 2.9. *Пусть $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, M$, а также $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M + 1, \ldots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$. Если при этом оператор A нормальный и выполнены условия* 2.1^M *и* 2.2, *то*

(1) *$g_i(x) = K_i x + b_i$, $x \in Q$, где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, M$;*

(2) *$|J_{g_i}(x)| = 1$, $x \in Q$, $i = M + 1, \ldots, N$.*

Доказательство. Так как $G^2_{g_i} = \varnothing$, по лемме 2.2 получим $g_i(Q) = Q$, $i = M + 1, \ldots, N$.

Докажем первое утверждение леммы. Приведем доказательство для преобразования g_1 (преобразования $g_2, \ldots, g_M$ рассматриваются аналогично). Как и в доказательстве леммы 2.4, выберем точку $x^0 \in G^2_{g_1}$.

В этой точке выполнены условия $(A1)$ и $(A2)$. Существует окрестность $B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$, удовлетворяющая свойствам $(B1)$ и $(B2)$.

1. Так же как в пункте 1 доказательства леммы 2.4 предположим, что условия $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ выполняются в точке x^0, следовательно, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются свойства $(B3_i)$–$(B8_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$, имеем $g_i(x) \equiv g_i^{-1}(x)$, $x \in Q$, $i = M+1, \dots, N$. Следовательно, условия $(A4_i)$ и $(A5_i)$ совпадают при $i = M+1, \dots, N$, а также условия $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ совпадают при $i, j = M+1, \dots, N$ $(i \neq j)$. Таким образом, свойства $(B4_i)$ и $(B5_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$ совпадают при $i, j = M+1, \dots, N$ $(i \neq j)$.

Справедливы все дальнейшие рассуждения из пункта 1 доказательства леммы 2.4. В соответствии с ними преобразование g_1 оказывается аффинным в окрестности $B_\delta(x^0)$ точки x^0 и удовлетворяет соотношению (2.30).

2. Как и в доказательстве леммы 2.4, рассмотрим различные случаи нарушения условий $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ на множестве с непустой внутренностью при некоторых $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$.

Если имеет место случай $(\overline{A3})$, то он рассматривается так же, как в пункте 2 доказательства леммы 2.4.

Пусть выполнено соотношение $(\overline{A4})$. Имеем $\mathcal{K}_4 \subseteq \{1, \dots, M\}$, так как из условия 2.2 и тождеств $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$, $i = M+1, \dots, N$, следует, что $g_1(x) \neq g_i(x)$ при почти всех $x \in Q$, $i = M+1, \dots, N$. Следовательно, в силу условия 2.1^M случай $(\overline{A4})$ рассматривается так же, как в пункте 3 доказательства леммы 2.4.

Условия $(A5_i)$, $i = 1, \dots, N$, остаются выполненными в силу условия 2.2, поэтому соотношение $(\overline{A5})$ не имеет места.

Если выполнено одно из соотношений $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$, то такой случай рассматривается так же, как в пункте 5 доказательства леммы 2.4.

Любая возможная комбинация соотношений $(\overline{A3})$, $(\overline{A4})$ и $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$ рассматривается так же, как в пункте 6 доказательства леммы 2.4.

3. Из пункта 7 доказательства леммы 2.4 следует, что преобразование $g_1(x)$ имеет вид (2.18) при всех $x \in Q$. Повторяя рассуждения пунктов 1–3 настоящего доказательства для преобразований $g_2, \ldots, g_M$, получим первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение леммы. Приведем доказательство для преобразования g_{M+1} (преобразования $g_{M+2}, \ldots, g_N$ рассматриваются аналогично). Обозначим через $(A1)^{M+1}$, $(A2)^{M+1}$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$ условия $(A1)$, $(A2)$, $(A4_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, в которых g_1 заменено на g_{M+1}, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ i, j \neq M+1)$.

Выберем точку $x^0 \in Q$. Отметим, что поскольку $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$, $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$, условия $(A3_i)$ и $(A6_i)^{M+1}$ совпадают при $i = 1, \ldots, N$. Также при $i = M+1, \ldots, N$ совпадают следующие условия: $(A4_i)^{M+1}$ и $(A5_i)^{M+1}$, $(A7_i)^{M+1}$ и $(A8_i)^{M+1}$. Кроме того, при $i, j = M+1, \ldots, N$ совпадают условия $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$.

4. Предположим, что при $x = x^0$ выполняются условия $(A1)^{M+1}$, $(A3_i)$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ i, j \neq M+1)$. Условие $(A2)^{M+1}$ не выполняется, поскольку $g^2_{M+1}(x) \equiv x$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются соответствующие условия $(B1)^{M+1}$, $(B3_i)$, $(B4_i)^{M+1}$–$(B8_i)^{M+1}$, $(B9_{ij})^{M+1}$ и $(B10_{ij})^{M+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ i, j \neq M+1)$.

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g_{M+1}(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp}\xi \subset g_{M+1}(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — некоторый полином. По определению преобразований $g_1, \ldots, g_N$ очевидно, что $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Поскольку оператор A нормальный (т. е. выполнено равенство (2.42)), в силу определения функции u и условий $(B1)^{M+1}$, $(B3_i)$, $(B4_i)^{M+1}$–$(B8_i)^{M+1}$, $(B9_{ij})^{M+1}$ и $(B10_{ij})^{M+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ i, j \neq M+1)$, так же как в пункте 1 доказательства леммы 2.4 (с тем отличием, что нарушается условие $(B2)^{M+1}$) для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_{M+1}A_0u(x) + A_0A^*_{M+1}u(x) = A_0A_{M+1}u(x) + A^*_{M+1}A_0u(x),$$

где

$$\begin{aligned}
&A_{M+1}A_0u(x) = a_{M+1}(\Delta u)(g_{M+1}(x)),\\
&A_0A_{M+1}u(x) = a_{M+1}\Delta\big(u(g_{M+1}(x))\big),\\
&A_0A^*_{M+1}u(x) = a_{M+1}\Delta\left(|J_{g_{M+1}}(x)|u(g_{M+1}(x))\right),\\
&A^*_{M+1}A_0u(x) = a_{M+1}|J_{g_{M+1}}(x)|(\Delta u)(g_{M+1}(x)).
\end{aligned}$$

Отсюда для любого $x \in B_\delta(x^0)$ будем иметь

$$\Delta\big[\big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)u(g_{M+1}(x))\big] = \big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_{M+1}(x)).$$

Используя формулу

$$\Delta[v(x)w(x)] = \Delta v(x)w(x) + 2(\nabla v(x), \nabla w(x)) + v(x)\Delta w(x),$$

для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)\Delta u(g_{M+1}(x)) + \sum_{i=1}^n \left(2\frac{\partial|J_{g_{M+1}}(x)|}{\partial x_i}\frac{\partial u(g_{M+1}(x))}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2|J_{g_{M+1}}(x)|}{\partial x_i^2}u(g_{M+1}(x))\right) = \big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_{M+1}(x)).$$

Пусть $P(x) = (x_k - [g_{M+1}]_k(x^B))(x_m - [g_{M+1}]_m(x^B))$, где $k, m = 1, \dots, n$ а $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Тогда аналогично соотношениям (2.33) мы получим

$$u(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B} = \big[u(g_{M+1}(x))\big]_{x_i}\Big|_{x=x^B} = 0. \tag{2.52}$$

Из двух последних равенств вытекает

$$\Big[\big(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\big)\Delta u(g_{M+1}(x))\Big]\Big|_{x=x^B} = \Big[\big(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\big)(\Delta u)(g_{M+1}(x))\Big]\Big|_{x=x^B}. \tag{2.53}$$

Следовательно, имеет место либо $|J_{g_{M+1}}(x^B)| = 1$, либо

$$\Delta u(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B} = (\Delta u)(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B}.$$

Поскольку точка $x^B \in B_\delta(x^0)$ произвольна, в первом случае мы имеем

$$|J_{g_{M+1}}(x)| = 1 \quad \forall x \in B_\delta(x^0). \tag{2.54}$$

Во втором случае, заменяя g_1 на g_{M+1} в равенстве (2.20), мы получим (2.21), (2.22) и (2.23), где g_1 заменено на g_{M+1}. Тогда мы также приходим к свойству (2.54).

5. Как было указано в доказательстве леммы 2.4, в силу того что $|J_{g_{M+1}}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, теперь достаточно рассмотреть только случаи, когда условия $(A1)^{M+1}$, $(A3_i)$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$ нарушаются на множестве с непустой внутренностью.

Во-первых, если условие $(A1)^{M+1}$ нарушается для любого $x \in B_\delta(x^0)$, т. е. $g_{M+1}(x) = x$ в $B_\delta(x^0)$, то свойство (2.54) выполняется тривиальным образом.

Случай $(\overline{A3})$ рассматривается так же, как в пункте 2 доказательства леммы 2.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства, с заменой g_1 на g_{M+1}.

Случай $(\overline{A4})^{M+1}$ не реализуется, так как в силу тождества $g_{M+1}(x) \equiv g^{-1}_{M+1}(x)$ и условия 2.2 имеет место $g_{M+1}(x) \neq g_i(x)$ при почти всех $x \in Q$ и всех $i = 1, \dots, N$, $i \neq M+1$.

Условия $(A5_i)^{M+1}$, $i = 1, \dots, N$, не нарушаются в силу условия 2.2, поэтому случай $(\overline{A5})^{M+1}$ не реализуется.

Любой из случаев $(\overline{A6})^{M+1}$–$(\overline{A10})^{M+1}$ рассматривается так же, как в пункте 5 доказательства леммы 2.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства, с заменой g_1 на g_{M+1} и применением равенства (2.52).

Любая возможная комбинация случаев $(\overline{A3}), (\overline{A4})^{M+1}, (\overline{A6})^{M+1}$–$(\overline{A10})^{M+1}$ рассматривается так же, как в пункте 6 доказательства леммы 2.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства. Единственное отличие в том, что нарушается условие $(B2)$. В результате, используя равенство (2.52), в любом случае придем к равенству

$$(A_{M+1}A_0u(x) + A_0A^*_{M+1}u(x))\big|_{x=x^B} = (A_0A_{M+1}u(x) + A^*_{M+1}A_0u(x))\big|_{x=x^B},$$

откуда получим (2.53) и, следовательно, (2.54).

Таким образом, при почти всех $x \in Q$ имеет место $|J_{g_{M+1}}(x)| = 1$. В силу того что $|J_{g_{M+1}}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, получим $|J_{g_{M+1}}(x)| = 1$ для любого $x \in Q$. Повторяя пункты 4, 5 настоящего доказательства для преобразований $g_{M+2}, \dots, g_N$, получим второе утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.10. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, *и если оператор A нормальный и выполнены условия* 2.1^M, 2.2 *и* 2.3^M, *то*

$$g_ig_j(x) = g_jg_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N. \tag{2.55}$$

Доказательство. Предположения этой леммы повторяют предположения леммы 2.9 с добавлением условия 2.3^M.

По лемме 2.9 получим

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{2.56}$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, а также

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad g_i(Q) = Q, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{2.57}$$

По определению $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. В силу того что $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, а преобразования $g_1 \dots, g_N$ имеют вид (2.56), (2.57), получим, что $A_1 u, \dots, A_N u, A_1^* u, \dots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [15, теорема 5.1, § 5, гл. 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Из равенств (2.56) следует, что уравнения (2.21), (2.22) для преобразований $g_1, \dots, g_M$ обращаются в тождества в Q. Подставляя их в равенство (2.20), записанное для преобразований $g_1, \dots, g_M$, получим для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$

$$A_0 A_i u = A_i A_0 u, \quad A_0 A_i^* u = A_i^* A_0 u, \quad i = 1, \dots, M. \tag{2.58}$$

По условию леммы мы имеем $g_i(x) \equiv g_i^{-1}(x)$ для всех $x \in Q$, $i = M+1, \dots, N$. Принимая это во внимание, из леммы 2.1 и равенств (2.57) получим

$$A_i = A_i^*, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{2.59}$$

Значит, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеют место равенства

$$A_0 A_i u = A_0 A_i^* u, \quad A_i A_0 u = A_i^* A_0 u, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{2.60}$$

Учитывая равенства (2.58) и (2.60), из нормальности оператора A для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ вытекает

$$(A_1 + \ldots + A_N)(A_1^* + \ldots + A_N^*)u = (A_1^* + \ldots + A_N^*)(A_1 + \ldots + A_N)u,$$

т. е.

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N}(A_iA_j^*u+A_jA_i^*u)+\sum_{i=1}^{N}A_iA_i^*u=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N}(A_i^*A_ju+A_j^*A_iu)+\sum_{i=1}^{N}A_i^*A_iu. \tag{2.61}$$

Из свойств (2.56) и (2.57) следует, что $|J_{g_i}(x)|\equiv 1$, $x\in Q$, $i=1,\dots,N$. Тогда в силу леммы 2.1 для любого $u\in\mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_iA_i^*u=A_i^*A_iu=a_i^2u,\quad i=1,\dots,N. \tag{2.62}$$

В силу равенств (2.59) для любого $u\in\mathcal{D}(AA^*)$ имеем

$$A_iA_j^*u+A_jA_i^*u=A_i^*A_ju+A_j^*A_iu=A_iA_ju+A_jA_iu,\quad i=M+1,\dots,N. \tag{2.63}$$

С учетом (2.62) и (2.63) для любого $u\in\mathcal{D}(AA^*)$ запишем равенство (2.61) в виде

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M}(A_iA_j^*u+A_jA_i^*u)+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N}(A_iA_ju+A_jA_i^*u)=$$

$$=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M}(A_i^*A_ju+A_j^*A_iu)+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N}(A_i^*A_ju+A_jA_iu).$$

Поскольку $|J_{g_i}(x)|\equiv 1$, $x\in Q$, $i=1,\dots,N$, с помощью леммы 2.1 для любого $u\in\mathcal{D}(AA^*)$ и почти всех $x\in Q$ получим

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M}a_ia_j\big(u(g_j^{-1}g_i(x))+u(g_i^{-1}g_j(x))\big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N}a_ia_j\big(u(g_jg_i(x))+u(g_i^{-1}g_j(x))\big)=$$

$$=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M}a_ia_j\big(u(g_jg_i^{-1}(x))+u(g_ig_j^{-1}(x))\big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N}a_ia_j\big(u(g_jg_i^{-1}(x))+u(g_ig_j(x))\big). \tag{2.64}$$

Так же как в доказательстве леммы 2.5 в силу условия 2.3^M и вложения $\dot{C}^\infty(Q) \subset \mathcal{D}(AA^*)$, применяя предложение 2.5 к равенству (2.64), получим, что для всех $i, j = 1, \ldots, M$ верно либо (2.46), либо (2.47). Поэтому так же как в доказательстве леммы 2.5 для всех $x \in Q$ получим

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad i, j = 1, \ldots, M. \tag{2.65}$$

Таким же образом, применяя предложение 2.5 к равенству (2.64), получим, что для всех $i = 1, \ldots, M$, $j = M+1, \ldots, N$ и $x \in Q$ верна по крайней мере одна из систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \\ g_i^{-1} g_j(x) = g_j g_i^{-1}(x), \end{cases} \qquad (2.66) \qquad \begin{cases} g_i g_j(x) = g_i^{-1} g_j(x), \\ g_j g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x). \end{cases} \qquad (2.67)$$

Из системы (2.67) следует, что $g_j g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x)$, откуда $g_i(x) = g_i^{-1}(x)$, т. е. $x \in \widetilde{G}^2_{g_i}$. С другой стороны, $1 \leqslant i \leqslant M$, следовательно, преобразование g_i имеет вид (2.56). В пункте 7 доказательства леммы 2.4 было доказано, что для такого g_i множество $\widetilde{G}^2_{g_i}$ принадлежит гиперплоскости размерности $r \leqslant n-2$, а значит, $\widetilde{G}^2_{g_i}$ — множество нулевой меры в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, почти всюду в Q верна система (2.66). Поскольку преобразования $g_1, \ldots, g_N$ непрерывны, для любого $x \in Q$ получим

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = M+1, \ldots, N. \tag{2.68}$$

Равенства (2.65) и (2.68) завершают доказательство. □

Пример 2.8. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 2.3^M существенно в лемме 2.10. При $N = 3$, $n = 3$ рассмотрим оператор $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$. Положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда условие 2.3^M не выполняется. Возьмем следующие ортогональные преобразования:

$$g_1(x) = K_1 x, \quad g_2(x) = K_2 x, \quad g_3(x) = K_3 x,$$

где

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x \in Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Тогда $g_1(Q) = g_2(Q) = g_3(Q) = Q$ и легко проверить, что

$$g_2^2(x) = x, \quad g_3^2(x) = x, \quad g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x)$$

для любого $x \in Q$ и

$$g_1^2(x) \neq x, \quad g_1 g_2(x) \neq g_2 g_1(x), \quad g_1 g_3(x) \neq g_3 g_1(x)$$

для любого $x \in Q \setminus \{x : x_1 = 0,\, x_3 = 0\}$.

В терминах § 2.1 получим, что $G^2_{g_1} = Q \setminus \{x : x_1 = 0,\, x_3 = 0\} \neq \varnothing$ и $G^2_{g_2} = G^2_{g_3} = \varnothing$. Коэффициенты $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ удовлетворяют условию 2.1^M. Также легко убедиться в том, что выполнено условие 2.2 (поскольку матрицы ортогональны, обратные преобразования получаются переходом к транспонированным матрицам).

Докажем, что оператор A нормальный. Очевидно, что для любого $x \in Q$

$$g_1 g_2^{-1}(x) = g_1^{-1} g_3(x), \quad g_2 g_1^{-1}(x) = g_3^{-1} g_1(x), \tag{2.69}$$

$$g_1 g_3^{-1}(x) = g_2^{-1} g_1(x), \quad g_3 g_1^{-1}(x) = g_1^{-1} g_2(x). \tag{2.70}$$

Поскольку g_1, g_2, g_3 — ортогональные преобразования, так же как в доказательстве леммы 2.5 доказывается, что для g_1, g_2, g_3 выполнены равенства (2.43), (2.44). Следовательно, нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2 + A_3$ при $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Легко проверить, что оператор $A_1 + A_2 + A_3$ является нормальным в силу равенств $g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x)$, (2.69) и (2.70), $x \in Q$.

Таким образом, выполнены все условия леммы 2.10, кроме условия 2.3^M. Оператор A является нормальным, однако преобразование g_1 не коммутирует с g_2 и g_3. Следовательно, условие 2.3^M существенно в лемме 2.10.

$\square$

Пример 2.9. Преобразования g_1, g_2, g_3 в примере 2.8 являются конечными суперпозициями отражений относительно координатных плоскостей и поворотов на угол $\pi/2$ вокруг координатных осей. Приведем пример преобразований, являющихся конечными суперпозициями только поворотов на угол $\pi/2$, и имеющих те же свойства, что и преобразования g_1, g_2, g_3 из примера 2.8:

$$g_1(x) = K_1 x, \quad g_2(x) = K_2 x, \quad g_3(x) = K_3 x,$$

где

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Лемма 2.11. *Пусть $G^2_{g_i} \neq \varnothing$, $g_i(Q) = Q$ при $i = 1, \dots, M$, $G^2_{g_i} = \varnothing$ при $i = M+1, \dots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, и если преобразования $g_1, \dots, g_N$ таковы, что*

(1) *$g_i(x) = K_i x + b_i$, $x \in Q$, где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, M$,*

(2) $|J_{g_i}(x)| = 1, \ x \in Q, \ i = M+1, \dots, N,$

(3) $g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \ x \in Q, \ i = 1, \dots, M, \ j = 1, \dots, N,$

то оператор A нормальный.

Доказательство. Так как $G^2_{g_i} = \varnothing$, по лемме 2.2 получим $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$.

Поскольку преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (2.56), (2.57), так же как в доказательстве леммы 2.10 получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.10, получим, что оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда равенство (2.64) верно для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Из условия (3) леммы следует, что равенство (2.64) верно для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. $\square$

Доказательство теоремы 2.3 следует из лемм 2.9, 2.10 и 2.11.

Тема 3

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой теме методом Фурье строится решение линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений, соответствующих линеаризованной задаче (1) (см. введение). Определяющую роль при построении решения играют условия нормальности эллиптических функционально-дифференциальных операторов, полученные в теме 2. Соответствующие результаты были получены в работе [7].

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x),t) + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{3.1}$$

с краевыми условиями первого либо второго рода

$$u\Big|_{\Gamma_T} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\Gamma_T} = 0 \tag{3.3}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{3.4}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial Q \in C^\infty$, $\Omega_T = Q \times [0,T]$, $\Gamma_T = \partial Q \times [0,T]$, $\widetilde{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_T, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$, а $g_1, \dots, g_N$ — некоторые преобразования переменных. Будем также использовать обозначение $Q_t = Q \times \{t\}$, так что $Q_0 = Q$.

Всюду в этой главе будем предполагать, что неограниченный линейный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$, действующий по формуле

$$(Au)(x) = \Delta u(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x)),$$

является нормальным. (Здесь оператор $Bu = u\big|_{\partial Q}$ или $Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q}$ задает краевые условия первого или второго рода.)

Условие 3.1. *Преобразования $g_1, \dots, g_N$ взаимно однозначны, принадлежат классу гладкости C^3, имеет место $g_i(Q) = Q$, $|J_{g_i}(x)| \neq 0$ $(x \in \overline{Q})$, $i = 1, \dots, N$, а также*

$$G_{g_i}^2 \neq \varnothing, \quad i = 1, \dots, M,$$
$$G_{g_i}^2 = \varnothing, \quad i = M+1, \dots, N.$$

(См. определения $|J_{g_i}(x)|$ и $G_{g_i}^m$ в § 2.1.)

Условие 3.2. *Преобразования $g_1, \dots, g_N$ при всех $x \in Q$ удовлетворяют соотношениям*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad i = 1, \dots, M,$$
$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad i = M+1, \dots, N,$$
$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N,$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

Применяя теорему 2.3 из § 2.2, получим следующие результаты.

Теорема 3.1.

1. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.2. *Тогда оператор* A *нормальный.*

2. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 2.1^M, 2.2, 2.3^M. *Тогда условие* 3.2 *эквивалентно нормальности оператора* A.

Всюду в этой главе будем считать, что условия 3.1 и 3.2 выполнены, следовательно, оператор A является нормальным.

Введем анизотропное пространство Соболева $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ функций, принадлежащих $L_2(\Omega_T)$ вместе со своими обобщенными производными первого порядка по переменным $x_1, \ldots, x_N$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int\limits_{\Omega_T} (\nabla u \overline{\nabla v} + u\overline{v})\, dxdt = \int\limits_0^T (u,v)_{W_2^1(Q_t)} dt.$$

Введем также следующие подпространства:

$$\begin{aligned} W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T) &= \{u \in W_2^{1,0}(\Omega_T) : u\big|_{\Gamma_T} = 0\}, \\ \widehat{W}_2^1(\Omega_T) &= \{u \in W_2^1(\Omega_T) : u\big|_{Q_T} = 0\}, \\ \widehat{W}_{2,D}^1(\Omega_T) &= \{u \in W_2^1(\Omega_T) : u\big|_{\Gamma_T} = 0,\ u\big|_{Q_T} = 0\}. \end{aligned}$$

Определение 3.1. Назовем функцию $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ ($u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$) *обобщенным решением* задачи (3.1), (3.2), (3.4) (задачи (3.1), (3.3), (3.4)), если для любой функции $v \in \widehat{W}_{2,D}^1(\Omega_T)$ ($v \in \widehat{W}_2^1(\Omega_T)$) выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_T} \left(\nabla u \overline{\nabla v} - u\overline{v}_t - \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x),t)\overline{v} \right) dxdt = \int\limits_{Q_0} \varphi\overline{v}\big|_{t=0} dx + \int\limits_{\Omega_T} f\overline{v}\, dxdt. \tag{3.5}$$

□

3.2. Спектральные свойства эллиптического функционально-дифференциального оператора

Через $\mathring{W}_2^1(Q)$ обозначим замыкание в $W_2^1(Q)$ множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$.

Определение 3.2. Не равная тождественно нулю функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ $(u \in W_2^1(Q))$ называется *обобщенной собственной функцией* оператора A с краевыми условиями $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ ($Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0$), соответствующей *собственному значению* $\lambda \in \mathbb{C}$, если для любой функции $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ $(v \in W_2^1(Q))$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \left(\nabla u \overline{\nabla v} - \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x)) \overline{v} \right) dx = -\lambda \int\limits_Q u \overline{v}\, dx. \tag{3.6}$$

□

Ниже под *собственными функциями* будем понимать обобщенные собственные функции.

Рассмотрим неограниченный линейный оператор $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$, действующий по формуле $A_0 u = \Delta u$, а также ограниченный линейный оператор $A_g : L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$(A_g u)(x) = \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x)).$$

Тогда $A = A_0 + A_g$. Через $\|.\|_2$ обозначим норму в пространстве линейных ограниченных операторов в $L_2(Q)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Оператор A имеет компактную резольвенту и дискретный спектр, удовлетворяющий условиям $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|A_g\|_2,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|A_g\|_2\}$ и $\operatorname{Re}\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Оператор A_0 самосопряженный. Поэтому, как известно [12, гл. V, § 3], спектр $\sigma(A_0)$ вещественный и

$$\|(A_0 - \lambda I)^{-1}\|_2 \leqslant |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{3.7}$$

Так как оператор A_g ограничен, получим

$$\|(A_0 - \lambda I)^{-1}A_g\|_2 \leqslant \|A_g\|_2 |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{3.8}$$

Очевидно, для $\lambda \notin \sigma(A_0)$ можно записать

$$A - \lambda I = (A_0 - \lambda I)(I + (A_0 - \lambda I)^{-1}A_g). \tag{3.9}$$

При $|\operatorname{Im}\lambda| > \|A_g\|_2$ из (3.8) получим $\|(A_0 - \lambda I)^{-1}A_g\|_2 \leqslant c_1$, где $c_1 < 1$. Отсюда вытекает оценка $\|I + (A_0 - \lambda I)^{-1}A_g\|_2 \geqslant c_2 > 0$, следовательно, существует ограниченный оператор $(I + (A_0 - \lambda I)^{-1}A_g)^{-1}$. Поэтому из (3.7), (3.9) следует, что $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|A_g\|_2\}$.

Интегрируя по частям, для $u \in \mathcal{D}(A)$ мы имеем

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{L_2(Q)} = -\int\limits_Q |\nabla u|^2\,dx + \operatorname{Re}\int\limits_Q A_g u\,\overline{u}\,dx \leqslant \|A_g\|_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|A_g\|_2\}$.

Из теоремы Банаха об обратном операторе и компактности вложения $W_2^2(Q)$ в $L_2(Q)$ следует, что резольвента $(A - \lambda I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактна при $\lambda \notin \sigma(A)$. По теореме об операторе с компактной резольвентой (теорема 1.20) оператор A имеет дискретный спектр. В силу того что оператор A_g ограничен имеет место $\operatorname{Re}\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$ (см. [12, гл. V, § 4]). □

Из теоремы об операторе с компактной резольвентой (теорема 1.20) и теоремы об ограниченном нормальном операторе (теорема 1.15) вытекает следующее утверждение (см. лемму 3.8 в [54]).

Лемма 3.2. *Пусть* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ — *линейный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве* H, *и пусть его* *область определения $\mathcal{D}(A)$ плотна в H. Предположим, что оператор A имеет компактную резольвенту $R(\lambda, A) : H \to H$.*

В таком случае в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора A, тогда и только тогда, когда оператор A — нормальный.

Из теоремы 3.1 и лемм 3.1, 3.2 вытекает следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия 3.1 и 3.2. Тогда в $L_2(Q)$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора A.*

3.3. Формальное решение методом Фурье

Обозначим через $\{e_k\}$ ортонормированный базис в $L_2(Q)$, состоящий из собственных функций оператора A. Будем искать решение задач (3.1), (3.2), (3.4) и (3.1), (3.3), (3.4) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k(x). \tag{3.10}$$

Разложим правую часть уравнения (3.1) и начальную функцию (3.4) в ряды Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) e_k(x), \quad f_k(t) = \int\limits_{\Omega_T} f(x,t)\overline{e_k(x)}\,dx, \tag{3.11}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k(x), \quad \varphi_k = \int\limits_{Q} \varphi(x)\overline{e_k(x)}\,dx. \tag{3.12}$$

Подставим ряды (3.10), (3.11) и (3.12) в уравнение (3.1) и начальное условие (3.4), учитывая, что $Ae_k = \lambda_k e_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t)e_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)e_k(x), \tag{3.13}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k(x). \tag{3.14}$$

Умножая скалярно уравнения (3.13), (3.14) на базисные функции, при каждом $k = 1, 2, \ldots$ получим задачу Коши

$$u_k'(t) - \lambda_k u_k(t) = f_k(t), \tag{3.15}$$

$$u_k(0) = \varphi_k. \tag{3.16}$$

Решая задачу (3.15), (3.16), получим

$$u_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau. \tag{3.17}$$

Таким образом, решение задачи (3.1), (3.2), (3.4) (задачи (3.1), (3.3), (3.4)) записывается в виде ряда (3.10), где e_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — собственные функции оператора A с краевым условием $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ $(Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0)$, а коэффициенты $u_k(t)$, $f_k(t)$ и φ_k определяются по формулам (3.17), (3.11) и (3.12) соответственно.

3.4. Существование обобщенных решений

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.2. *Тогда для любых* $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение* $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ $(u \in W_2^{1,0}(\Omega_T))$ *задачи* (3.1), (3.2), (3.4) (*задачи* (3.1), (3.3), (3.4)), *которое представляется в виде ряда*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)e_k(x),$$

где

$$u_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau,$$

$$f_k(t) = \int\limits_{\Omega_T} f(x,t)\overline{e_k(x)}\, dx, \quad \varphi_k = \int\limits_Q \varphi(x)\overline{e_k(x)}\, dx,$$

а e_k, λ_k — *собственные функции и собственные значения оператора* A *с краевыми условиями* $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ $(Bu = (\partial u/\partial\nu)\big|_{\partial Q} = 0)$.

Ряд сходится в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{L_2(Q)} + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}\right). \tag{3.18}$$

Доказательство. Из теоремы 3.2 следует, что при выполнении условий 3.1 и 3.2 существует ортонормированный базис в $L_2(Q)$, состоящий из собственных функций оператора A. Применим метод Фурье.

1. При фиксированном k положим $f(x,t) = f_k(t)e_k(x)$, $\varphi(x) = \varphi_k e_k(x)$. Докажем, что $u(x,t) = u_k(t)e_k(x)$ является обобщенным решением задачи (3.1), (3.2), (3.4) (задачи (3.1), (3.3), (3.4)).

В силу определений u_k и e_k имеем $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ $(u \in W_2^{1,0}(\Omega_T))$. Действительно,

$$\|u\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \|e_k\|^2_{W_2^1(Q)} \int\limits_0^T |u_k(t)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\|e_k\|^2_{W_2^1(Q)} \int\limits_0^T \left(|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{2\operatorname{Re}\lambda_k(t-\tau)} d\tau \int\limits_0^t |f_k(\tau)|^2 d\tau\right) dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|e_k\|^2_{W_2^1(Q)} \left(\|\varphi\|^2_{L_2(Q)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega_T)}\right),$$

а по определению e_k в случае $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ дополнительно получаем $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$.

Подставляя $u(x,t)$ в интегральное тождество (3.5) при $v \in \widehat{W}_{2,D}^1(\Omega_T)$ $(v \in \widehat{W}_2^1(\Omega_T))$ и учитывая интегральное тождество (3.6) и равенства

$u'_k(t)=\lambda_k u_k(t)+f_k(t)$, $u_k(0)=\varphi_k$, $f(x,t)=f_k(t)e_k(x)$ и $\varphi(x)=\varphi_k e_k(x)$, получим

$$\int\limits_{\Omega_T}\left(u_k(t)\nabla e_k(x)\overline{\nabla v}-u_k(t)e_k(x)\overline{v}_t-u_k(t)\sum_{i=1}^{N}a_i e_k(g_i(x))\overline{v}\right)dxdt=$$

$$=\int\limits_0^T u_k(t)\,dt\int\limits_{Q_t}\left(-\lambda_k e_k(x)\overline{v}-e_k(x)\overline{v}_t\right)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega_T}\left(-\lambda_k u_k(t)e_k(x)\overline{v}+u'_k(t)e_k(x)\overline{v}\right)\,dxdt+\int\limits_{Q_0}u_k(0)e_k(x)\overline{v}\big|_{t=0}dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega_T}f\overline{v}\,dxdt+\int\limits_{Q_0}\varphi\overline{v}\big|_{t=0}\,dx.$$

Таким образом, $u(x,t)=u_k(t)e_k(x)$ является обобщенным решением задачи (3.1), (3.2), (3.4) (задачи (3.1), (3.3), (3.4)).

2. Пусть $f(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{L}f_k(t)e_k(x)$, $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{L}\varphi_k e_k(x)$. Тогда по принципу суперпозиции получим, что $S_L(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{L}u_k(t)e_k(x)$ является обобщенным решением задачи (3.1), (3.2), (3.4) (задачи (3.1), (3.3), (3.4)).

3. Пусть $f(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(t)e_k(x)$, $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k e_k(x)$. Докажем, что ряд $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(t)e_k(x)$ сходится в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$. В силу полноты пространства $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ достаточно доказать фундаментальность последовательности $\{S_L\}$. Учитывая ортонормированность в $L_2(Q)$ системы функций $\{e_k\}$, имеем

$$\|S_{L_2}-S_{L_1}\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)}=\int\limits_0^T dt\int\limits_{Q_t}\left(|S_{L_2}-S_{L_1}|^2+|\nabla(S_{L_2}-S_{L_1})|^2\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=L_1+1}^{L_2}\int\limits_0^T|u_k(t)|^2\,dt\int\limits_{Q_t}\left(|e_k(x)|^2+|\nabla e_k(x)|^2\right)dx=$$

$$= 2\sum_{k=L_1+1}^{L_2}\int_0^T |u_k(t)|^2\,dt\left(1+\int_{Q_t}|\nabla e_k(x)|^2 dx\right).$$

Используя интегральное тождество (3.6) из определения собственных функций e_k, ортонормированность в $L_2(Q)$ системы функций $\{e_k\}$, неравенство Коши—Буняковского и свойства $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$ $(x \in Q)$ и $g_i(Q) = Q$ преобразований $g_1, \ldots, g_N$, получим

$$\int_Q |\nabla e_k(x)|^2\,dx = \int_Q \left(\sum_{i=1}^N a_i e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} - \lambda_k |e_k(x)|^2\right) dx =$$

$$= -\lambda_k + \sum_{i=1}^N a_i \int_Q e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} dx =$$

$$= \left|-\lambda_k + \sum_{i=1}^N a_i \int_Q e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} dx\right| \leqslant |\lambda_k| + \sum_{i=1}^N |a_i| \left|\int_Q e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_k| + \sum_{i=1}^N |a_i| \left(\int_Q |e_k(g_i(x))|^2\,dx\right)^{1/2} \overset{y^i=g_i(x)}{=}$$

$$\overset{y^i=g_i(x)}{=} |\lambda_k| + \sum_{i=1}^N |a_i| \left(\int_Q |e_k(y^i)|^2\,dy^i\right)^{1/2} = |\lambda_k| + \sum_{i=1}^N |a_i|. \quad (3.19)$$

Используя формулу (3.17) и неравенство Коши—Буняковского, получим

$$|u_k(t)|^2 \leqslant 2|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} + 2\left|\int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} - \frac{1-e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t}}{\operatorname{Re}\lambda_k}\int_0^t |f_k(\tau)|^2 d\tau.$$

В силу леммы 3.1 при $k > k_0$, где k_0 — достаточно большое число, имеет место $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$. Поэтому при $k > k_0$ получим

$$|u_k(t)|^2 \leqslant 2|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} - \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_k}\int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau,$$

откуда при $k > k_0$ следует

$$\int\limits_0^T |u_k(t)|^2\,dt \leqslant \frac{C_2}{-\operatorname{Re}\lambda_k}\left(|\varphi_k|^2 + \int\limits_0^T |f_k(t)|^2\,dt\right). \tag{3.20}$$

Используя оценки (3.19) и (3.20), при $L_1 > k_0$ получим

$$\|S_{L_2} - S_{L_1}\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} \leqslant$$
$$\leqslant 2C_2 \sum_{k=L_1+1}^{L_2} \frac{1}{-\operatorname{Re}\lambda_k}\left(1 + |\lambda_k| + \sum_{i=1}^N |a_i|\right)\left(|\varphi_k|^2 + \int\limits_0^T |f_k(t)|^2\,dt\right).$$

В силу леммы 3.1 имеем

$$1 \leqslant \frac{1}{-\operatorname{Re}\lambda_k}\left(1 + |\lambda_k| + \sum_{i=1}^N |a_i|\right) \leqslant C_3 \quad \text{при всех} \quad k > k_0,$$
$$\frac{1}{-\operatorname{Re}\lambda_k}\left(1 + |\lambda_k| + \sum_{i=1}^N |a_i|\right) \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{L_1,L_2\to\infty}\|S_{L_2}-S_{L_1}\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} \leqslant 2C_2C_3 \lim_{L_1,L_2\to\infty}\sum_{k=L_1+1}^{L_2}\left(|\varphi_k|^2+\int\limits_0^T|f_k(t)|^2\,dt\right) = 0$$

в силу ограниченности норм $\|\varphi\|_{L_2(Q)}$, $\|f\|_{L_2(\Omega_T)}$ и равенств Парсеваля

$$\|\varphi\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{k=1}^\infty |\varphi_k|^2, \qquad \|f\|^2_{L_2(\Omega_T)} = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^T |f_k(t)|^2\,dt. \tag{3.21}$$

Таким образом, ряд $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^\infty u_k(t)e_k(x)$ сходится в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$. Если рассматривается задача (3.1), (3.2), (3.4), то дополнительно получим

$u \in W^{1,0}_{2,D}(\Omega_T)$. Переходя к пределу при $L \to \infty$ в тождестве

$$\int\limits_{\Omega_T} \left(\nabla S_L(x,t)\overline{\nabla v} - S_L(x,t)\overline{v}_t - \sum_{i=1}^{N} a_i S_L(g_i(x),t)\overline{v} \right) dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_0} \sum_{k=1}^{L} \varphi_k e_k(x)\overline{v}\big|_{t=0} dx + \int\limits_{\Omega_T} \sum_{k=1}^{L} f_k(t) e_k(x)\overline{v}\, dxdt$$

при любом $v \in \widehat{W}^1_{2,D}(\Omega_T)$ ($v \in \widehat{W}^1_2(\Omega_T)$), получим, что $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (3.1), (3.2), (3.4) (задачи (3.1), (3.3), (3.4)).

Поскольку существует лишь конечное число собственных значений с неотрицательной вещественной частью, то справедлива оценка

$$\|S_L\|^2_{W^1_2(\Omega_T)} \leqslant C_4 \sum_{k=1}^{L} \left(|\varphi_k|^2 + \int\limits_0^T |f_k(t)|^2\, dt \right).$$

Переходя к пределу при $L \to \infty$, в силу равенств Парсеваля (3.21) получим оценку (3.18). □

3.5. Единственность обобщенных решений

Теорема 3.4. *Если выполнено условие* 3.1, *то задача* (3.1), (3.2), (3.4) (*задача* (3.1), (3.3), (3.4)) *имеет не более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Предположим, что существует два обобщенных решения $u_1, u_2 \in W^{1,0}_{2,D}(\Omega_T)$ ($u_1, u_2 \in W^{1,0}_2(\Omega_T)$) задачи (3.1), (3.2), (3.4) (задачи (3.1), (3.3), (3.4)). Тогда функция $u = u_1 - u_2$ является решением задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x),t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{3.22}$$

$$Bu = 0, \tag{3.23}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in Q, \tag{3.24}$$

где $Bu = u\big|_{\Gamma_T}$ $\Big(Bu = (\partial u/\partial\widetilde{\nu})\big|_{\Gamma_T}\Big)$. По определению обобщенного решения (определение 3.1) для любой функции $v \in \widehat{W}^1_{2,D}(\Omega_T)$ $(v \in \widehat{W}^1_2(\Omega_T))$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_T} \left(\nabla u \overline{\nabla v} - u\overline{v}_t - \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x),t)\overline{v}\right) dxdt = 0. \tag{3.25}$$

Положим

$$v(x,t) = \int\limits_t^T u(x,\tau)\,d\tau.$$

Очевидно, что $v \in \widehat{W}^1_{2,D}(\Omega_T)$ $(v \in \widehat{W}^1_2(\Omega_T))$ и

$$v_t(x,t) = -u(x,t), \qquad \nabla v(x,t) = \int\limits_t^T \nabla u(x,\tau)\,d\tau.$$

Тогда из (3.25) получим

$$\int\limits_{\Omega_T} |u|^2 dxdt + \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,t)\,dt \int\limits_t^T \overline{\nabla u(x,\tau)}\,d\tau -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} a_i \int\limits_Q dx \int\limits_0^T u(g_i(x),t)\,dt \int\limits_t^T \overline{u(x,\tau)}\,d\tau = 0. \tag{3.26}$$

Обозначим через I второе слагаемое в левой части равенства (3.26). Меняя порядок интегрирования по переменным t и τ, получим

$$I = \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\,d\tau \int\limits_0^\tau \overline{\nabla u(x,t)}\,dt = \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\,d\tau \int\limits_0^T \overline{\nabla u(x,t)}\,dt -$$
$$- \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^T \overline{\nabla u(x,t)}\,dt = \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\,d\tau \int\limits_0^T \overline{\nabla u(x,t)}\,dt - I,$$

откуда

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_Q \left| \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\,d\tau \right|^2 dx \geqslant 0. \tag{3.27}$$

Оценим модуль третьего слагаемого в равенстве (3.25). Используя неравенство Коши—Буняковского и свойства $\left|J_{g_i^{-1}}(x)\right| \leqslant C$ $(x \in Q)$ и $g_i(Q) = Q$ преобразований $g_1, \ldots, g_N$, получим

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_i \int\limits_{\Omega_T} u(g_i(x),t)\overline{v(x,t)}\,dxdt\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |a_i| \left|\int\limits_{\Omega_T} u(g_i(x),t)\overline{v(x,t)}\,dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|v\|_{L_2(\Omega_T)} \sum_{i=1}^{N} |a_i| \left(\int\limits_0^T\int\limits_Q |u(g_i(x),t)|^2 dxdt\right)^{1/2} \overset{y^i=g_i(x)}{=}$$

$$\overset{y^i=g_i(x)}{=} \quad \|v\|_{L_2(\Omega_T)} \sum_{i=1}^{N} |a_i| \left(\int\limits_0^T\int\limits_Q |u(y^i,t)|^2 \left|J_{g_i^{-1}}(x)\right| dy^i dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{C}\left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|\right) \|u\|_{L_2(\Omega_T)} \|v\|_{L_2(\Omega_T)}. \quad (3.28)$$

Оценим норму $\|v\|_{L_2(\Omega_T)}$. Используя неравенство Коши—Буняковского, получим:

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega_T)} = \int\limits_{\Omega_T} \left|\int\limits_t^T u(x,\tau)\,d\tau\right|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_T} (T-t)\left(\int\limits_t^T |u(x,\tau)|^2 d\tau\right) dxdt \leqslant \frac{T^2}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \quad (3.29)$$

Используя оценки (3.27)–(3.29), из равенства (3.26) получим

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} - T\sqrt{\frac{C}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|\right) \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} \leqslant 0,$$

откуда следует, что $\|u\|_{L_2(\Omega_T)} = 0$ при

$$T < \sqrt{\frac{2}{C}}\left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|\right)^{-1}. \quad (3.30)$$

Таким образом, если T достаточно мало, так что условие (3.30) выполняется, то задача (3.22), (3.23), (3.24) имеет только тривиальное обобщенное решение, следовательно, задача (3.1), (3.2), (3.4) (задача (3.1), (3.3), (3.4)) имеет не более одного обобщенного решения в области Ω_T.

В противном случае выберем такое $T_0 < T$, чтобы для T_0 выполнялось условие (3.30), и рассмотрим задачу (3.22), (3.23), (3.24) в области $Q \times (0, T_0)$. Такая задача будет иметь только тривиальное обобщенное решение $w_0 \equiv 0$. Затем рассмотрим задачу (3.22), (3.23), (3.24) в области $Q \times (T_0, 2T_0)$ с начальным условием $w_1(x, T_0) = w_0(x, T_0) = 0$. Эта задача также будет иметь только тривиальное обобщенное решение $w_1 \equiv 0$. Рассматривая аналогичные задачи в областях $Q \times (2T_0, 3T_0)$, $Q \times (3T_0, 4T_0), \dots$, за конечное число шагов исчерпаем интервал $(0, T)$. Таким образом, задача (3.22), (3.23), (3.24) в области $\Omega_T = Q \times (0, T)$ при любом T имеет только тривиальное обобщенное решение, следовательно, задача (3.1), (3.2), (3.4) (задача (3.1), (3.3), (3.4)) имеет не более одного обобщенного решения при любом T. $\square$

Упражнения

1. Пусть A — банахова алгебра.

(а) Доказать, что если элементы x и xy обратимы в A, то обратим и элемент y.

(б) Доказать, что если элементы xy и yx обратимы в A, то оба элемента x и y обратимы.

(в) Доказать, что, вообще говоря, может быть $xy = e \neq xy$.

Указание. Рассмотреть правый и левый сдвиги S_R и S_L на подходящем банаховом пространстве функций f, заданных на множестве неотрицательных целых чисел:

$$(S_Rf)(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n \geqslant 1; \end{cases} \qquad (S_Lf)(n) = f(n+1).$$

2. Пусть A — банахова алгебра и $x, y \in A$.

(а) Доказать, что если элемент $e - yx$ обратим, если обратим элемент $e - xy$.

Указание. Если z — обратный к $e - xy$, то рассмотреть $e + yzx$.

(б) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \sigma(xy)$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(yx)$. Показать, однако, что $\sigma(xy)$ может содержать точку $\lambda = 0$, тогда как $\sigma(yx)$ не содержит этой точки.

(в) Доказать, что если элемент x обратим, то $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

3. Пусть A — алгебра матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Доказать, что величина $|\alpha| + |\beta|$ задает на A норму банаховой алгебры.

4. При каких значениях параметров $a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}$ оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,

$$Au(x) = \Delta u(x) + u(g_1(x)) + au(g_2(x)),$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad g_2(x) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 1/2 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

является нормальным?

5. При каких значениях параметров $a, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$, β_1, β_2, $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$, δ_1, δ_2 оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < 1\}$,

$$Au(x) = \Delta u(x) + (a^2 - 1)u(g_1(x)) - au(g_2(x)),$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ -1/2 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -1/2 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix},$$

является нормальным?

6. Рассчитать методом сеток численное решение второй смешанной задачи в области $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t) + 2u(y, -x, t) + t(x + y), \quad (x, y, t) \in Q \times [0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial Q \times [0,T]} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = 1 + \cos^2 3\pi x \cos^2 \pi y.$$

7. Найти собственные значения и собственные функции и рассчитать методом Фурье численное решение первой смешанной задачи в области $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t) - u(y, -x, t) + txy, \quad (x, y, t) \in Q \times [0, T],$$

$$u\big|_{\partial Q \times [0,T]} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \cos^2 5\pi x \cos^2 3\pi y.$$

8. Найти собственные значения и собственные функции и рассчитать методом Фурье численное решение первой смешанной задачи в области $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t) + u(g_1(x, y), g_2(x, y), t) + tx - y, \quad (x, y, t) \in Q \times [0, T],$$

$$u\big|_{\partial Q \times [0,T]} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = (1 + \cos\sqrt{x^2 + y^2})/(1 + 50x^2),$$

$$g_1(x, y) = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \qquad g_2(x, y) = x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

Раздел II

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА—ХОПФА

Тема 4

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА—ХОПФА

Задача (1), моделирующая нелинейную оптическую систему (см. введение), имеет класс периодических решений, возникающих в результате бифуркации из состояния равновесия. Такие решения соответствуют наблюдаемым оптическим эффектам. В этой теме изучаются понятие бифуркации Андронова—Хопфа в различных задачах и методы ее исследования.

4.1. Бифуркация Андронова—Хопфа для обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом пункте рассматривается классическая теория бифуркации Андронова—Хопфа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответствующие факты изложены по книге [16].

Многие физические задачи приводят к дифференциальным уравнениям, зависящим от параметра:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = X_\mu(x), \qquad x \in P, \quad \mu, t \in \mathbb{R}.$$

Здесь X_μ — гладкое векторное поле на банаховом многообразии P, зависящее от параметра μ.

Определение 4.1. *Потоком* на топологическом пространстве M называется отображение $F_t : M \to M$, зависящее от параметра t, такое, что F_0 — тождественное отображение и $F_{t+s} = F_t \circ F_s$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$.

Поток называется C^k-потоком, если $F_t(x)$ непрерывно дифференцируемо k раз по (t, x). $\square$

Определение 4.2. Множество $A \subset M$ называется *инвариантным множеством* потока F_t, если $F_t(A) \subset A$ для всех t. $\square$

Определение 4.3. Множество $A \subset M$ называется *устойчивым*, если для любой окрестности U множества A существует такая его окрестность V, что траектория $x(x_0, t) \equiv F_t(x_0)$ принадлежит U, если $x_0 \in V$. Множество A называется *неустойчивым*, если оно не является устойчивым. $\square$

Определение 4.4. Множество $A \subset M$ называется *асимптотически устойчивым*, если существует окрестность V множества A такая, что $\bigcap\limits_{t \geqslant 0} F_t(V) = A$. Асимптотически устойчивое множество называется также *притягивающим множеством* (или *аттрактором*). $\square$

Другими словами, множество A устойчиво (или асимптотически устойчиво), если для любой начальной точки, близкой к A, траектория, проходящая через эту точку, остается вблизи A (или, соответственно, стремится к A) (рис. 4.1).

Множество A называется *неустойчивым*, если оно не является устойчивым.

Теорема 4.1. *Пусть $X : E \to E$ — непрерывное линейное отображение банахова пространства E в себя. Нуль является устойчивой притягивающей точкой потока, порожденного X, если спектр $\sigma(X)$ отображения X лежит в открытой левой полуплоскости. Если существует $z \in \sigma(X)$ с $\operatorname{Re} z > 0$, то нуль — неустойчивая точка.*

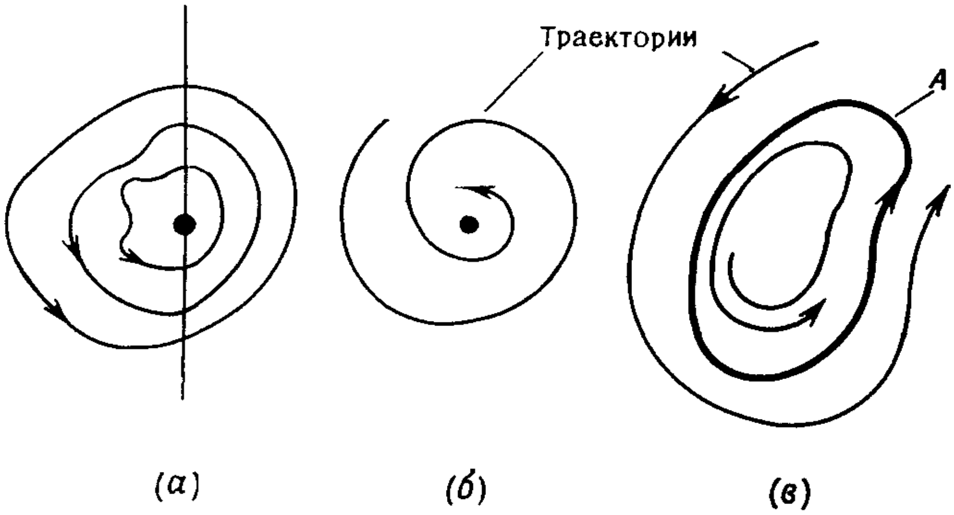

Рис. 4.1. а — устойчивая особая точка; б — асимптотически устойчивая особая точка; в — устойчивая замкнутая орбита.

Замечание 4.1. Спектр непрерывного линейного оператора является компактным множеством, поэтому если спектр $\sigma(X)$ отображения X лежит в открытой левой полуплоскости, то он отделен от границы. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть X — векторное поле класса C^1 на банаховом многообразии P и p_0 — особая точка X, т. е. $X(p_0) = 0$. Обозначим через F_t поток, определенный полем X, т. е. $\dfrac{\partial}{\partial t}F_t(x) = X(F_t(x))$, $F_0(x) = x$. (Заметим, что $F_t(p_0) = p_0$ для всех t.)*

Если спектр $dX(p_0)$ лежит в левой полуплоскости, т. е. $\sigma(dX(p_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, то особая точка p_0 асимптотически устойчива.

Если в спектре существует изолированная точка $z \in \sigma(dX(p_0))$, для которой $\operatorname{Re} z > 0$, то особая точка p_0 неустойчива. Если же $\sigma(dX(p_0)) \subset \{z : \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ и существует $z \in \sigma(dX(p_0))$ с $\operatorname{Re} z = 0$, то устойчивость не может быть определена по линеаризованному уравнению.

Предположим, что существует непрерывная кривая $p(\mu)$ на многообразии P такая, что $X_\mu(p(\mu)) = 0$, т. е. при каждом μ точка $p(\mu)$ — особая точка потока X_μ. Предположим, что точка $p(\mu)$ является притягивающей при $\mu < \mu_0$ и неустойчивой при $\mu > \mu_0$. Тогда точка $(p(\mu_0), \mu_0)$ дает нам пример *точки бифуркации* потока X_μ. При значениях $\mu < \mu_0$ поток X_μ можно описать (по крайней мере в окрестности точки $p(\mu)$), сказав, что траектории потока стремятся к $p(\mu)$ при $t \in \infty$. Однако при значениях $\mu > \mu_0$ это уже не так, и поэтому при переходе через значение μ_0 характер потока может внезапно измениться.

4.1.1. Теорема о центральном многообразии. Основная ценность теоремы о центральном многообразии заключается в том, что, используя ее, можно свести бесконечномерную задачу к конечномерной. В случае конечномерной задачи можно свести исследование к задаче меньшего числа измерений. Для задачи о рождении цикла эта теорема позволяет редуцировать задачу к размерности 2 без потери какой-либо информации относительно устойчивости.

Теорема 4.3. *Пусть Ψ — отображение, определенное в окрестности нуля в банаховом пространстве Z. Будем предполагать, что Ψ принадлежит классу C^{k+1}, $k \geqslant 1$ и $\Psi(0) = 0$. Предположим также, что $D\Psi(0)$ имеет спектральный радиус 1 и что спектр $D\Psi(0)$ расщепляется на две части: часть, лежащую на единичной окружности, и остаток, который находится на ненулевом расстоянии от единичной окружности. Обозначим через Y обобщенное собственное подпространство оператора $D\Psi(0)$, порожденное частью спектра, лежащей на единичной окружности; будем предполагать, что Y имеет размерность $d < \infty$.*

Тогда существует окрестность нуля $V \subset Z$ и C^k-подмногообразие $M \subset V$ размерности d, проходящее через 0 и касающееся Y в точке 0, для которого выполнены следующие условия:

(1) (*локальная инвариантность*): *если* $x \in M$ *и* $\Psi(x) \in V$, *то* $\Psi(x) \in M$;

(2) (*локальная устойчивость*): *если* $\Psi^n(x) \in V$ *для всех* $n = 0, 1, \ldots$, *то при* $n \to \infty$ *расстояние между* $\Psi^n(x)$ *и* M *стремится к нулю.*

Теорема 4.4 (о центральном многообразии для потоков)**.** *Пусть* Z — *банахово пространство, допускающее* C^∞ *норму всюду, кроме точки* 0, *и пусть* F_t — *полупоток класса* C^0, *определенный в окрестности* 0 *для* $0 \leqslant t \leqslant \tau$. *Предположим, что* $F_t(0) = 0$ *и* $F_t(x)$ *при* $t > 0$ *класса* C^{k+1} *совместно по* t *и* x. *Предположим также, что спектр линейной полугруппы* $DF_t(0) : Z \to Z$ *имеет вид* $e^{t(\sigma_1 \cup \sigma_2)}$, *где* $e^{t\sigma_1}$ *лежит на единичной окружности* (*т. е.* σ_1 *лежит на мнимой оси*) *и* $e^{t\sigma_2}$ *лежит внутри единичной окружности на ненулевом расстоянии он нее при* $t > 0$, *т. е.* σ_2 *лежит в левой полуплоскости. Пусть* Y — *обобщенное собственное подпространство, соответствующее части спектра на единичной окружности, и предположим, что* $\dim Y = d < \infty$.

Тогда существует окрестность V *точки* 0 *в* Z *и* C^k*-подмногообразие* $M \subset V$ *размерности* d, *проходящее через* 0 *и касающееся* Y *в* 0, *такое, что*

(1) *если* $x \in M$, $t > 0$ *и* $F_t(x) \in V$, *то* $F_t(x) \in M$;

(2) *если* $t > 0$ *и* $F_t^n(x)$ *определено и лежит в* V *для всех* $n = 0, 1, \ldots$, *то* $F_t^n(x) \to M$ *при* $n \to \infty$.

4.1.2. Отображение Пуанкаре.

Определение 4.5. Рассмотрим замкнутую орбиту γ и точку m на γ, например $m = \gamma(0)$, и пусть S — локальная трансверсальная секущая, т. е. подмногообразие коразмерности 1, трансверсальное γ (т. е. $\gamma'(0)$ не касается S). Пусть поток определен в (открытой) области $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R}$.

Отображение Пуанкаре для орбиты γ — это отображение $P : W_0 \to W_1$ (рис. 4.2) такое, что:

(1) $W_0, W_1 \subset S$ — открытые окрестности точки $m \in S$, а P является C^k-диффеоморфизмом;

(2) существует функция $\delta : W_0 \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $x \in W_0$ точка $(x, \tau - \delta(x)) \in \mathcal{D}$ и $P(x) = F(x, \tau - \delta(x))$;

(3) если $t \in (0, \tau - \delta(x))$, то $F(x, t) \notin W_0$.

□

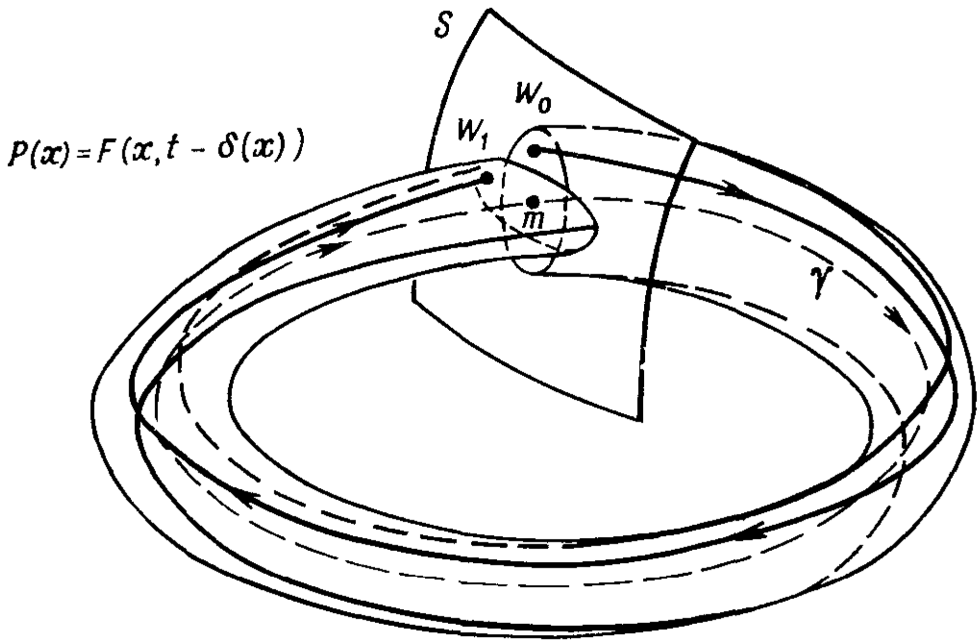

Рис. 4.2. Отображение Пуанкаре

Теорема 4.5.

(1) *Если X — векторное поле класса C^k на многообразии M и γ — замкнутая орбита поля X, то существует отображение Пуанкаре для γ.*

(2) *Если $P : W_0 \to W_1$ — отображение Пуанкаре для γ (на локальной трансверсальной секущей S, проходящей через точку*

$m \in \gamma$), а P' — такое же отображение на секущей S' в точке $m' \in \gamma$, то P и P' локально сопряжены. Это означает, что существуют открытые окрестности W_2 точки $m \in S$, W_2' точки $m' \in S'$ и C^k-диффеоморфизм $H : W_2 \to W_2'$ такой, что $W_2 \subset W_0 \cap W_1$, $W_2' \subset W_0'$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(W_2) \cap W_2 & \xrightarrow{P} & W_2 \cap P(W_2) \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ W_2' & \xrightarrow{P'} & S' \end{array}$$

коммутативна.

4.1.3. Теорема Андронова—Хопфа в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4.6. *Пусть X_μ — векторное поле класса C^k ($k \geqslant 4$) в $\mathbb{R}^2$ такое, что $X_\mu(0) = 0$ для всех μ, а поле $X = (X_\mu, 0)$ также класса C^k. Предположим, что $dX_\mu(0,0)$ имеет два различных комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$ $\overline{\lambda(\mu)}$, причем $\operatorname{Re}\lambda(0) = 0$, $\operatorname{Re}\lambda(\mu) > 0$ при $\mu > 0$. Пусть также $\left.\dfrac{\partial(\operatorname{Re}\lambda(\mu))}{\partial\mu}\right|_{\mu=0} > 0$. Тогда:*

(1) *существует C^{k-2} функция $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ такая, что при $x_1 \neq 0$ точка $(x_1, 0, \mu(x_1))$ лежит на замкнутой орбите поля X периода, близкого к $2\pi/|\lambda(0)|$, причем $\mu(0) = 0$;*

(2) *существует окрестность U точки $(0,0,0)$ в $\mathbb{R}^3$ такая, что любая замкнутая орбита, лежащая в U, является одной из орбит вышеуказанного семейства.*

Кроме того, если точка 0 — слабый аттрактор поля X_0, то

(3) *$\mu(x_1) > 0$ для всех $x_1 \neq 0$, замкнутые орбиты устойчивы, а радиус орбиты при изменении μ растет как $\sqrt{\mu}$.*

Доказательство. Суть доказательства состоит в применении теоремы о неявной функции. Мы покажем, что для малых μ существует функция класса C^{k-1}, отображающая точку $(x_1, 0, \mu)$ в точку $(P(x_1, \mu), 0, \mu)$

первого такого пересечения орбиты потока X, проходящей через $(x_1, 0, \mu)$, с осью x_1, при котором x_1 и $P(x_1, \mu)$ имеют одинаковый знак (рис. 4.3). Пусть $V(x_1, \mu) = P(x_1, \mu) - x_1$, т. е. V есть функция смещения.

Используя теорему о неявной функции, получим кривую $(x_1, 0, \mu(x_1))$ нулей V, соответствующих замкнутым орбитам потока X. Отображение $(x, 0) \mapsto (P(x, \mu(x_1)), 0)$ есть отображение Пуанкаре, построенное для замкнутой орбиты, проходящей через точку $(x_1, 0, \mu(x_1))$. Затем, пользуясь стандартными результатами относительно отображения Пуанкаре, мы найдем условия устойчивости замкнутой орбиты. Единственность замкнутых орбит получается, по существу, из единственности функции, определяемой теоремой о неявной функции.

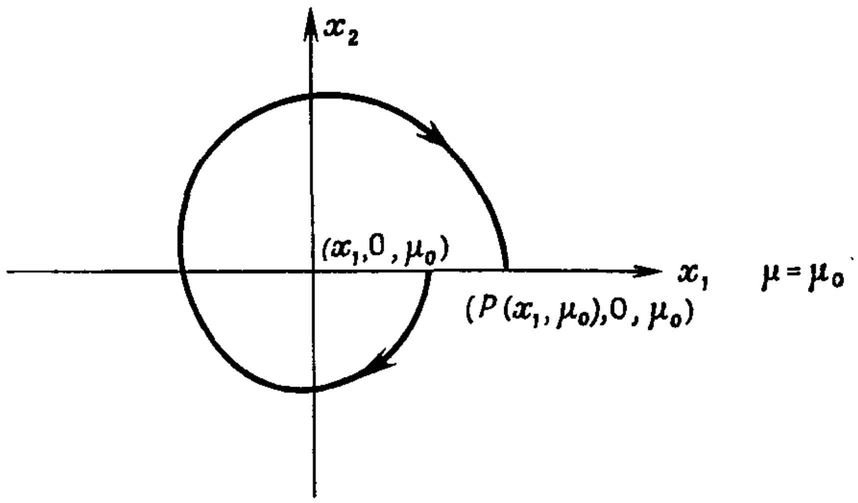

Рис. 4.3

Шаг 1. Делая линейную замену координат в $\mathbb{R}^2$, зависящую от μ, мы можем считать, что

$$dX_\mu(0,0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix},$$

где $\lambda(\mu)$ выбрано так, что $\operatorname{Im}\lambda(\mu) > 0$. В новых координатах X_μ имеет непрерывные производные до порядка k. Кроме того, для каждого μ

ось x_1 инвариантна относительно замены (т. е. новая ось та же, что и старая, мы меняем только ось x_2). Приведем несколько простых лемм, из которых вытекает все сказанное.

Лемма 4.1. *Пусть*

$$\mu \to \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix}$$

функция класса C^k из $U \subseteq \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^4$. Пусть матрица имеет два различных собственных значения для всех $\mu \in [a,b] \subset U$. Тогда собственные значения являются C^k-функциями из (a,b) в $\mathbb{C}$.

Доказательство. По формуле решений квадратного уравнения собственные значения равны $\dfrac{1}{2}\left(a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}}\right)$.

По предположению $(a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}$ отделено от нуля на (a,b), поэтому собственные значения являются C^k-функциями параметра μ на этом интервале. □

Лемма 4.2. *Пусть $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — линейное преобразование, принимающее действительные значения на действительных векторах и не имеющее действительных собственных значений. Пусть $v_1 + iv_2$ — собственный вектор с собственным значением λ. Тогда существует собственный вектор вида $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, имеющий то же собственное значение.*

Доказательство. Умножая $v_1 + iv_2$ на комплексное число, мы получаем собственный вектор с тем же собственным значением λ. Поэтому достаточно показать, что существует $z = x + iy$, для которого

$$(x+iy)\left[\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Это эквивалентно решению системы уравнений

$$xv_{11} - yv_{12} = 1,$$

$$xv_{21} - yv_{22} = 0,$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} v_{11} - v_{12} \\ v_{21} - v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы линейно независимы над полем $\mathbb{R}$, так как если $v_2 = cv_1$, то $v_1 + iv_2 = (1 + ic)v_1$. Поэтому $v_1 = (1 + ic)^{-1}(v_1 + iv_2)$ — действительный собственный вектор, чего не может быть. Следовательно, уравнение имеет решение. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть T — то же преобразование, что и в лемме* 4.2. *Тогда*

$$Tv_1 = \operatorname{Re}\lambda \cdot v_1 - \operatorname{Im}\lambda \cdot v_2, \qquad Tv_2 = \operatorname{Im}\lambda \cdot v_1 + \operatorname{Re}\lambda \cdot v_2.$$

Доказательство. $Tv_1 = \operatorname{Re} T(v_1 + iv_2)$, так как T — действительное число. $Tv_1 = \operatorname{Re}[\lambda(v_1 + iv_2)] = \operatorname{Re}\lambda \cdot v_1 - \operatorname{Im}\lambda \cdot v_2$.

$$Tv_2 = \operatorname{Im}[\lambda(v_1 + iv_2)] = \operatorname{Im}\lambda \cdot v_1 + \operatorname{Re}\lambda \cdot v_2.$$

$\square$

Используя предыдущие леммы, мы видим, что если

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$$

— собственный вектор $dX_\mu(0,0)$ с собственным значением $\lambda(\mu)$, то $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$ — линейно независимые векторы такие, что матрица $dX_\mu(0,0)$

относительно базиса $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix}.$$

Теперь мы покажем, что вектор $\begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$ является C^k-функцией μ. Пусть

$$dX_\mu(0,0) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Решаем уравнение

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + i\alpha(\mu) \\ i\beta(\mu) \end{pmatrix} = \lambda(\mu) \begin{pmatrix} 1 + i\alpha(\mu) \\ i\beta(\mu) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем уравнения

$$a_{11}(\mu) = \operatorname{Re}\lambda(\mu) - \operatorname{Im}\lambda(\mu) \cdot \alpha(\mu), \qquad a_{21}(\mu) = -\operatorname{Im}\lambda(\mu) \cdot \beta(\mu).$$

Поэтому

$$\alpha(\mu) = \frac{\operatorname{Re}\lambda(\mu) - a_{11}(\mu)}{\operatorname{Im}\lambda(\mu)}, \qquad \beta(\mu) = \frac{-a_{21}(\mu)}{\operatorname{Im}\lambda(\mu)}.$$

Так как замена координат линейна для каждого μ, а α и β суть C^k-функции μ, в новых координатах X будет иметь непрерывные k-е частные производные. В частности, $\dfrac{\partial X}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial X}{\partial x_2}$ суть C^{k-1}-функции в новых координатах.

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что замена координат уже сделана, т. е. что

$$dX_\mu(0,0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Существует единственное C^{k-1}-векторное поле $\widetilde{X}_\mu$ на $\mathbb{R}^2$ такое, что $\psi_* \widetilde{X}_\mu = X_\mu$, где $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение перехода к полярным координатам $\psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, а ψ_* — дифференциал ψ.

Пусть $\widetilde{X} = \widetilde{X}_r \dfrac{\partial}{\partial r} + \widetilde{X}_\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ — любое векторное поле на $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\psi_*(\widetilde{X}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{X}_r \\ \widetilde{X}_\theta \end{pmatrix}.$$

Так как $\psi_*(\widetilde{X}_\mu) = X_\mu$, то

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}_{\mu r} \\ \widetilde{X}_{\mu\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu 1} \\ X_{\mu 2} \end{pmatrix}, \qquad r \neq 0.$$

Поэтому если векторное поле $\widetilde{X}_\mu$ можно продолжить до C^{k-1}-поля на всем $\mathbb{R}^2$, то такое продолжение единственно. $\widetilde{X}_{\mu r} = \cos\theta \cdot X_{\mu 1} + \sin\theta \cdot X_{\mu 2}$, и оно класса C^{k-1} для всех (r,θ). Рассмотрим при $r \neq 0$

$$\widetilde{X}_{\mu r}(r,\theta) = \frac{-\sin\theta}{r} X_{\mu 1}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r} X_{\mu 2}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Тогда

$$\lim_{r\to 0} \widetilde{X}_{\mu 1}(r,\theta) = -\sin\theta \cdot \lim_{r\to 0} \frac{X_{\mu 1}(r\cos\theta, r\sin\theta) - X_{\mu 1}(0,0)}{r} + \\ + \cos\theta \cdot \lim_{r\to 0} \frac{X_{\mu 2}(r\cos\theta, r\sin\theta) - X_{\mu 1}(0,0)}{r},$$

так как $X_\mu(0,0) = 0$. Таким образом,

$$\lim_{r\to 0} \widetilde{X}_{\mu 1}(r,\theta) = (-\sin\theta) dX_{\mu 1}(0,0)(\cos\theta, \sin\theta) + \\ + (\cos\theta) dX_{\mu 2}(0,0)(\cos\theta, \sin\theta) = \\ = (-\sin\theta)(\cos\theta \cdot \operatorname{Re}\lambda(\mu) + \sin\theta \operatorname{Im}\lambda(\mu)) + \\ + (\cos\theta)(-\cos\theta \operatorname{Im}\lambda(\mu) + \sin\theta \cdot \operatorname{Re}\lambda(\mu)) = -\operatorname{Im}\lambda(\mu).$$

Поэтому мы определим

$$\widetilde{X}_\mu(r,\theta) = \begin{cases} (\cos\theta \cdot X_{\mu 1}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \cdot X_{\mu 2}(r\cos\theta, r\sin\theta))\dfrac{\partial}{\partial r} + \\ + \left(\dfrac{-\sin\theta}{r} X_{\mu 1}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \\ \hfill r \neq 0, \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu)\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \quad r = 0. \end{cases}$$

$$\widetilde{X}_{\mu\theta}(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{-\sin\theta}{r} X_{\mu 1}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r} X_{\mu 2}(r\cos\theta, r\sin\theta), & r \neq 0, \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu), & r = 0. \end{cases}$$

Чтобы установить, что $\widetilde{X}_{\mu\theta}(r,\theta)$ принадлежит классу C^{k-1}, мы покажем, что функции $\dfrac{1}{r} X_{\mu 1}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ и $\dfrac{1}{r}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ принадлежит C^{k-1}, когда они продолжены, как указано выше.

Лемма 4.4. *Пусть $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция класса C^k. Тогда*

$$A(x,y) - A(0,0) = \int_0^1 \left[\frac{\partial A(tx,ty)}{\partial x} x + \frac{\partial A(tx,ty)}{\partial y} y \right] dt.$$

Если

$$A_1(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx,ty)}{\partial x} dt, \qquad A_2(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx,ty)}{\partial y} dt,$$

то

$$A_1(0,0) = \frac{\partial A}{\partial x}(0,0), \qquad A_2(0,0) = \frac{\partial A}{\partial y}(0,0).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из формулы Тейлора, а второе легко доказывается по индукции. По лемме

$$\frac{1}{r} X_{\mu j}(rt\cos\theta, rt\sin\theta) = \cos\theta \int_0^1 \frac{\partial X_{\mu j}(rt\cos\theta, rt\sin\theta)}{\partial x} dt +$$

$$+ \sin\theta \int_0^1 \frac{\partial X_{\mu j}(rt\cos\theta, rt\sin\theta)}{\partial y} dt, \qquad j = 1, 2.$$

Так как все k-е частные производные X непрерывны и подынтегральные функции принадлежат классу C^{k-1}, то сами интегралы — функции класса C^k. □

Шаг 3. Отображение Пуанкаре.

Пусть потоки векторных полей $\widetilde{X}$ и X будут $\widetilde{\Phi}_t$ и Φ_t соответственно. Очевидно, что $\psi \circ \widetilde{\Phi}_t = \Phi_t \circ \psi$. Рассмотрим векторное поле $\widetilde{X}$. Так как $\widetilde{X}(0,\theta) = -\operatorname{Im}\lambda(\mu)\dfrac{\partial}{\partial\theta}$, то $\widetilde{\Phi}_{\mu t}(0,\theta) = (0, \theta - \operatorname{Im}\lambda(\mu), t, \mu)$. Если $\tau = 2\pi/|\lambda(0)|$, то $\widetilde{\Phi}_{0\tau}(0,0) = (0, 0 - |\lambda(0)| \cdot 2\pi/|\lambda(0)|, 0) = (0, -2\pi, 0)$ (рис. 4.4). Так как поле $\widetilde{X}$ периодично с периодом 2π, то оно — C^{k-1}-векторное поле на заполненном цилиндре, а орбита точки 0 замкнута. Мы можем связать с этой орбитой отображение Пуанкаре P (рис. 4.5). Тогда существует окрестность $U = \{(r, 0, \mu) : r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ такая, что определено отображение $\widetilde{P}(r, 0, \mu) = (\widehat{P}(r, \mu), -2\pi, \mu)$, где $\widehat{P}(r, \mu)$ — r-координата первого пересечения орбиты, начинающейся в точке $(r, 0, \mu)$, с прямой $\theta = -2\pi$. Это отображение класса C^{k-1}. Функция $T(r, \mu)$, которая задает время, когда $\widetilde{\Phi}_t(r, 0, \mu) = \widetilde{P}(r, 0, \mu)$, также класса C^{k-1}. Заметим, что отображение φ переводит ось r в ось x_1. Поэтому функция последования $(x_1, 0, \mu) \mapsto (x_1 + V(x_1, \mu), 0, \mu)$ определена и класса C^{k-1} в окрестности $U = \{(x_1, 0, \mu) : x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$. Точка $(x_1 + V(x_1, \mu), 0, \mu)$ является первым пересечением орбиты точки $(x_1, 0, \mu)$ с осью x_1, причем такой, что знаки x_1 и $P(x_1, \mu) = x_1 + V(x_1, \mu)$ одинаковы.

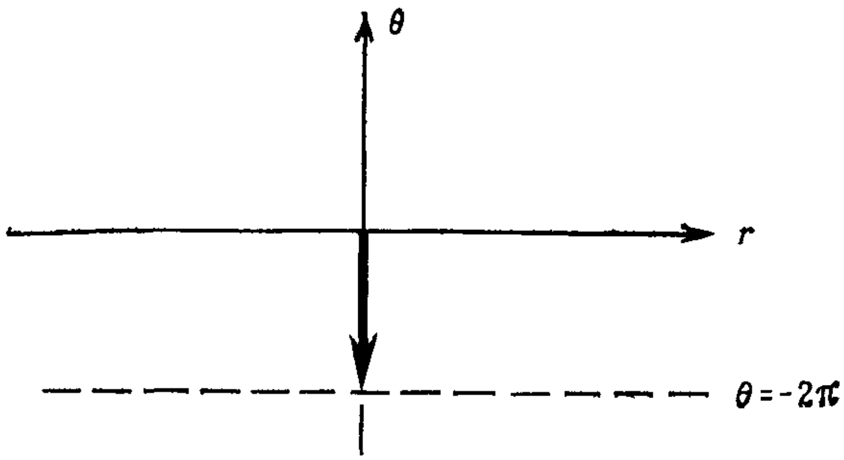

Рис. 4.4

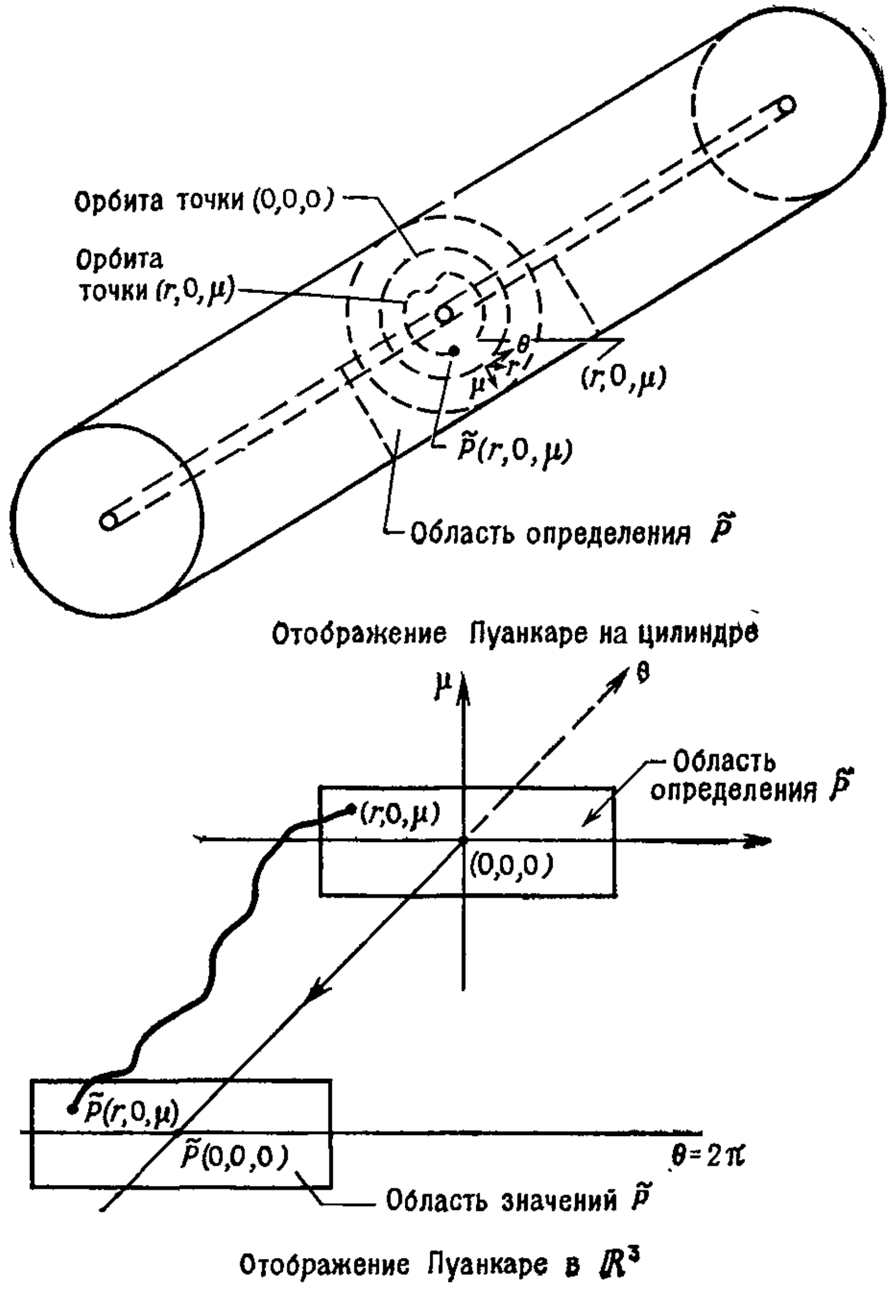

Рис. 4.5

Замечание 4.2. Используя равномерную непрерывность и θ-периодичность $\widetilde{\Phi}_t$, нетрудно доказать существование окрестности $\widetilde{N} = \{(r, \theta, \mu) : r^2 + \mu^2 < \delta\}$, в которой нет неподвижных точек $\widetilde{\Phi}_t$. Следовательно, неподвижными точками Φ_t в $N = \{(x_1, x_2, \mu) : x_1^2 + x_2^2 + \mu^2 < \delta\}$ являются только точки $(0, 0, \mu)$. $\square$

Лемма 4.5.
$$\frac{\partial P(x_1,\mu)}{\partial x_1}\Big|_{(0,\mu)} = e^{2\pi\,\mathrm{Re}\,\lambda(\mu)(\mathrm{Im}\,\lambda(\mu))^{-1}}.$$

Доказательство. Пусть $\Phi_{\mu t}(x_1,x_2) = (a_{\mu t}(x_1,x_2), b_{\mu t}(x_1,x_2))$. Имеет место следующее уравнение:

$$V(x_1,\mu) = P(x_1,\mu) - x_1 = \int\limits_0^{T(x_1,\mu)} X_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1,x_2), b_{\mu t}(x_1,x_2))dt.$$

Продифференцируем это уравнение по x_1:

$$\frac{V(x_1+\Delta x_1,\mu) - V(x_1,\mu)}{\Delta x_1} = \frac{1}{\Delta x_1}\left[\int\limits_0^{T(x_1+\Delta x_1,\mu)} X_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1+\Delta x_1,0),\right.$$

$$\left. b_{\mu t}(x_1+\Delta x_1,0))dt - \int\limits_0^{T(x_1,\mu)} X_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1,0), b_{\mu t}(x_1,0))dt\right] =$$

$$= \int\limits_0^{T(x_1,\mu)} \frac{1}{\Delta x_1}\big[X_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1+\Delta x_1,0), b_{\mu t}(x_1+\Delta x_1,0)) - X_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1,0),$$

$$b_{\mu t}(x_1,0))\big]dt + \frac{1}{\Delta x_1}\int\limits_{T(x_1,\mu)}^{T(x_1+\Delta x_1,\mu)} X_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1+\Delta x_1,0), b_{\mu t}(x_1+\Delta x_1,0))dt.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial V(x_1,\mu)}{\partial x_1} = \int\limits_0^{T(x_1,\mu)} \frac{\partial X_{1\mu}}{\partial x_1}(a_{\mu t}(x_1,0), b_{\mu t}(x_1,0))dt +$$
$$+ \frac{\partial T(x_1,\mu)}{\partial x_1} X_{1\mu}(a_{\mu T(x_1,\mu)}(x_1,0), b_{\mu T(x_1,\mu)}(x_1,0)).$$

В случае $x_1 = 0$ мы можем вычислить это выражение. Так как $a_{\mu t}(0,0) = b_{\mu t}(0,0) = 0$ и $X_{1\mu}(0,0) = 0$, то второй член правой части равен нулю. Напомним, что $T(0,\mu) = 2\pi/\,\mathrm{Im}\,\lambda(\mu)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial X_{1\mu}}{\partial x_1}(a_{\mu t}(0,0), b_{\mu t}(0,0)) = \frac{\partial X_{1\mu}}{\partial a}(0,0)\frac{\partial a_{\mu t}}{\partial x_1}(0,0) + \frac{\partial X_{1\mu}}{\partial b}\frac{\partial b_{\mu t}}{\partial x_1}(0,0).$$

Так как $\dfrac{\partial X_{1\mu}}{\partial a}(0,0) = \operatorname{Re}\lambda(\mu)$ и $\dfrac{\partial X_{1\mu}}{\partial b}(0,0) = \operatorname{Im}\lambda(\mu)$, а $(0,0)$ — особая точка $\Phi_{\mu t}$, то мы можем вычислить производные от потока

$$d\Phi_{\mu t}(0,0) = \exp[tdX_\mu(0,0)] = \exp\left[t\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu)\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)}\cos\operatorname{Im}\lambda(\mu)t & e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)}\sin\operatorname{Im}\lambda(\mu)t \\ -e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)}\sin\operatorname{Im}\lambda(\mu)t & e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)}\cos\operatorname{Im}\lambda(\mu)t \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial a_{\mu t}}{\partial x_1}(0,0) = e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)}\cos\operatorname{Im}\lambda(\mu)t$$

и

$$\frac{\partial b_{\mu t}}{\partial x_1}(0,0) = -e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)}\sin\operatorname{Im}\lambda(\mu)t.$$

Отсюда

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(0,\mu) = \int\limits_0^{2\pi(\operatorname{Im}\lambda(\mu))^{-1}} e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)}(\operatorname{Re}\lambda(\mu)\cos\operatorname{Im}\lambda(\mu)t -$$

$$- \operatorname{Im}\lambda(\mu)\sin\operatorname{Im}\lambda(\mu)t)dt = e^{2\pi\operatorname{Re}\lambda(\mu)(\operatorname{Im}\lambda(\mu))^{-1}} - 1.$$

□

Шаг 4. Использование теоремы о неявной функции для нахождения замкнутых орбит.

Наиболее очевидный путь отыскания замкнутых орбит потока Φ_t — это нахождение нулей функции V. Так как $V(0,0) = 0$, то если бы $\dfrac{\partial V}{\partial x_1}(0,0)$ или $\dfrac{\partial V}{\partial \mu}(0,0)$ не были бы равны нулю, условия теоремы о неявной функции были бы выполнены и мы могли бы получить кривую вида $(x_1(\mu),\mu)$ или $(x_1,\mu(x_1))$, на которой $V = 0$. К сожалению,

$\dfrac{\partial V}{\partial \mu}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(0,0)$. Воспользуемся вместо V функцией

$$\widetilde{V}(x_1,\mu) = \begin{cases} \dfrac{\partial V(x_1,\mu)}{\partial x_1}, & x_1 \neq 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(0,\mu), & x_1 = 0. \end{cases}$$

Лемма 4.6. *$\widetilde{V}$ принадлежит классу C^{k-2}.*

Доказательство. Напомним, что V класса C^{k-1}. Так как $V(0,\mu)=0$, то

$$V(x_1,\mu) = \int\limits_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_1}(tx_1,\mu)x_1 dt,$$

$$\frac{V(x_1,\mu)}{x_1} = \int\limits_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_1}(tx_1,\mu)dt, \quad x_1 \neq 0.$$

Последний интеграл, как нетрудно видеть, есть функция класса C^{k-2}.

$\square$

Лемма 4.7. $\widetilde{V}(0,0)=0$, $\dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$. *Поэтому существуют окрестности N_1 и N_2 точки 0 и единственная функция $\mu : N_1 \to N_2$, для которой $\mu(0)=0$ и $V(x_1,\mu(x_1))=0$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Re}\lambda(0)=0$, то

$$\widetilde{V}(0,0) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(0,0) = e^{2\pi \operatorname{Re}\lambda(0)(\operatorname{Im}\lambda(0))^{-1}} - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mu}(0,0) = \lim_{\mu\to 0} \frac{\widetilde{V}(0,\mu)-\widetilde{V}(0,0)}{\mu} = \lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}(0,\mu) - \frac{\partial V}{\partial x_1}(0,0)\right] =$$
$$= \frac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial}{\partial\mu}[e^{2\pi \operatorname{Re}\lambda(0)(\operatorname{Im}\lambda(0))^{-1}} - 1]\Big|_{\mu=0} =$$
$$= \frac{2\pi}{\operatorname{Im}\lambda(0)}\frac{\partial(\operatorname{Re}\lambda(\mu))}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0} \neq 0.$$

(Отметим, что это как раз то место, где используется предположение о ненулевой скорости пересечения мнимой оси собственными значениями.)

Остальная часть леммы легко следует из теоремы о неявной функции. $\square$

Шаг 5. Условия устойчивости. Соберем теперь результаты, относящиеся к производным от μ и V в нуле.

Лемма 4.8. $\mu'(0) = 0$.

Доказательство. В силу способа, которым выбиралась область определения V, мы знаем, что если $V(x_1, \mu(x_1)) = 0$, то орбита, проходящая через $(x_1, 0, \mu(x_1)) = 0$, пересекает ось x_1 в точке $(\widehat{x}_1, 0, \mu(x_1)) = 0$, где x_1 и $\widehat{x}_1$ имеют противоположные знаки (в полярных координатах это соответствует тому, что орбита точки $(x_1, 0, \mu(x_1)) = 0$ пересекает прямую $\theta = -\pi$ при $x = \widehat{x}_1$). Выберем последовательность точек $x_n \downarrow 0$. Тогда для каждой точки x_n существует y_n такое, что $y_n < 0$ и $\mu(x_n) = \mu(y_n)$. Из непрерывности Φ следует, что $y_n \to 0$ (поскольку $T(x_1, \mu)$ ограничена в окрестности точки $(0, 0)$, а Φ равномерно непрерывно на ограниченных множествах). Следовательно, так как $\mu(0) = 0$ и $\mu(x_n)/x_n$ имеет знак, противоположный знаку $\mu(y_n)/y_n$, то $\mu'(0) = 0$. $\square$

Лемма 4.9. $V(0,0) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(0,0) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2}(0,0) = 0$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $V(0,0) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(0,0) = 0$. Чтобы доказать, что $\dfrac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2}(0,0) = 0$, продифференцируем уравнение $V(x, \mu(x)) = 0$. Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} + \frac{\partial V}{\partial \mu}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} \cdot \mu'(x_1) = 0$$

и

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mu}\mu'(x_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}(\mu'(x_1))^2 + \frac{\partial V}{\partial \mu}\mu''(x_1)\right]\Bigg|_{(x_1,\mu(x_1))} = 0.$$

Если $x_1 = 0$, то $\mu'(x_1) = 0$, и мы получаем равенство $\dfrac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2}\Big|_{(0,0)} = 0$. $\square$

Определение 4.6. (0,0) называется *слабым аттрактором* поля X_0, если $\dfrac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0,0) < 0$. $\square$

Лемма 4.10. *Если* $(0,0)$ — *слабый аттрактор поля* X_0, *то орбиты, проходящие через точку* $(x_1, \mu(x_1))$, *являются устойчивыми и* $\mu(x_1) > 0$ *для малых* $x_1 \neq 0$.

Доказательство. Чтобы показать, что $\mu(x_1) > 0$ для малых $x_1 \neq 0$, мы докажем неравенство $\mu''(0) > 0$. Так как $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, отсюда следует, что μ имеет локальный минимум в точке $x_1 = 0$. Дифференцируем уравнение $V(x_1, \mu(x_1)) = 0$. Делая это троекратно и проводя вычисления при $x_1 = 0$, мы получаем

$$\mu''(0) = \frac{-\dfrac{\partial^3 V}{x_1^3}(0,0)}{3\dfrac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}(0,0)}.$$

Напомним, что $\dfrac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}(0,0) = \dfrac{2\pi}{\operatorname{Im}\lambda(0)}\dfrac{\partial(\operatorname{Re}\lambda(\mu))}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0} > 0$. Поэтому $\mu''(0) > 0$. Чтобы показать устойчивость замкнутой орбиты, проходящей через $(x_1, 0, \mu(x_1))$, мы должны показать, что собственные значения производной отображения Пуанкаре, связанного с этой орбитой, меньше единицы по абсолютной величине. Ясно, что отображением Пуанкаре, связанным с орбитой точки $(x_1, 0, \mu(x_1))$, является $P_{\mu(x_1)}(x_1') = P(x_1', \mu(x_1))$. Производная $P_\mu(x_1)$ в точке x_1 равна $\dfrac{\partial P}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))}$. Так как $\dfrac{\partial P}{\partial x_1}\Big|_{(0,0)} = 1$, то существует окрестность точки $(0,0)$, в которой $\dfrac{\partial P}{\partial x_1} > -1$. Таким образом, нам необходимо только показать, что для $x_1 \neq 0$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} < 1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial V}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} < 0.$$

Докажем, что функция $f(x_1) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))}$ имеет локальный минимум в точке $x_1 = 0$. Как мы уже знаем,

$$f(0) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$f'(x_1) = \frac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} + \mu'(x_1)\frac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))}.$$

Таким образом, $f'(0) = 0$;

$$f''(x_1) = \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} + 2\mu'(x_1)\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2\partial\mu}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} + \\ + [\mu'(x_1)]^2\frac{\partial^3 V}{\partial x_1\partial^2\mu}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))} + \mu''(x_1)\frac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}\Big|_{(x_1,\mu(x_1))}.$$

Поэтому

$$f''(0) = \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}\Big|_{(0,0)} + \mu''(0)\frac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}\Big|_{(0,0)} = \\ = \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0,0) - \frac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}(0,0)\frac{\dfrac{\partial^3 V}{x_1^3}(0,0)}{3\dfrac{\partial^2 V}{\partial\mu\partial x_1}(0,0)} = \frac{2}{3}\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0,0) < 0.$$

Следовательно, $f(x_1)$ имеет локальный максимум в точке $x_1 = 0$, и орбиты устойчивы. □

Шаг 6. Единственность замкнутых орбит.

Лемма 4.11. *Существует окрестность N точки $(0,0,0)$ такая, что любая замкнутая орбита потока X в N проходит через одну из точек вида $(x_1, 0, \mu(x_1))$.*

Доказательство. Существует окрестность N_ε точки $(0,0,0)$ такая, что если $(x_1, x_2, \mu) \in N_\varepsilon$, то орбита потока Φ_t, проходящая через точку (x_1, x_2, μ), пересекает ось x_1 в точке $(\widehat{x}_1, 0, \mu)$, где $|\widehat{x}_1| < \varepsilon$. Это доказывается теми же рассуждениями, которые были использованы для доказательства существования функции $P(x_1, \mu)$. Выберем $N = \{(x_1, x_2, \mu) :$

(x_1, μ) принадлежит области определения P, $\left.\dfrac{\partial P}{\partial x_1}\right|_{(x,\mu)} > 0$ и $T(x_1, \mu) > \varepsilon > 0\}$, и μ столь малым, чтобы $V(x_1, \mu) = 0$ для $\mu \in N$ тогда и только тогда, когда $\mu = \mu(x_1)$. Предположим, что $(x_1, 0, \mu) \in N$ и лежит на замкнутой орбите γ потока Φ_t. Если $V(x_1, \mu) = 0$, то $\mu = \mu(x_1)$, т. е. утверждение леммы выполняется. Допустим, что $V(x_1, \mu) \neq 0$. Тогда $P(x_1, \mu) > x_1$ либо $P(x_1, \mu) < x_1$. Так как $\gamma \subseteq N$, то $P^n(x_1, \mu)$ определено для всех $n \geqslant 0$. Далее,

$$P^n(x_1, \mu) - P^{n-1}(x_1, \mu) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(\xi, \mu) \left(P^{n-1}(x_1, \mu) - P^{n-2}(x_1, \mu)\right).$$

Таким образом, $P^n(x_1, \mu) - P^{n-1}(x_1, \mu)$ имеет тот же знак, что и $P^{n-1}(x_1, \mu) - P^{n-2}(x_1, \mu)$. По индукции

$$P^n(x_1, \mu) > P^{n-1}(x_1, \mu) \quad \text{либо} \quad P^n(x_1, \mu) < P^{n-1}(x_1, \mu)$$

для всех n. Для $T(x_1, \mu)$ существует ненулевая нижняя грань при $(x_1, 0, \mu) \in N$; отсюда следует, что $(x_1, 0, \mu)$ не лежит на замкнутой орбите потока Φ_t. □

4.1.4. Теорема Хопфа в $\mathbb{R}^n$. Теперь рассмотрим n-мерный случай. Мы будем ссылаться на теорему 4.6.

Теорема 4.7. *Пусть X_μ — векторное поле на $\mathbb{R}^n$ класса C^{k+1}, $k \geqslant 4$, которое удовлетворяет всем предположениям теоремы* 4.6, *за исключением того, что будем считать оставшуюся часть спектра отличной от двух уже рассматривавшихся простых собственных значений $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda(\mu)}$. Тогда выполняется заключение* (1). *Заключение* (2) *верно, если остаток спектра остается в левой полуплоскости, когда μ проходит через нуль. Заключение* (3) *верно, если относительно $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda(\mu)}$ точка* 0 *является “слабым аттрактором” в том же смысле, как и в* *теореме* 4.6, *и если координаты выбраны так, что*

$$dX_0(0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| & d_3X^1(0) \\ -|\lambda(0)| & 0 & d_3X^2(0) \\ 0 & 0 & d_3X^3(0) \end{pmatrix}, \qquad \lambda(0) \neq \sigma(d_3X^3(0)).$$

Замечание 4.3. Условие $\lambda(0) \neq \sigma(d_3X^3(0))$ не зависит от способа разложения $\mathbb{R}^n$ на пространство, соответствующее $\lambda(0)$, $\overline{\lambda(0)}$, и не его дополнение, поскольку выбор различных дополнительных подпространств, как нетрудно видеть, приводит только к замене $d_3X^3(0)$ сопряженным оператором $Cd_3X^3(0)C^{-1}$.

Условие $\lambda(0) \neq \sigma(d_3X^3(0))$ выполняется автоматически, если $n = 3$, так как матрица $dX_0(0)$ действительна. $\square$

Доказательство. Доказательство теоремы 4.7 получается комбинацией теоремы о центральном многообразии с теоремой 4.6, т. е. мы находим центральное многообразие, касательное к собственному подпространству $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$, и к нему применяем теорему 4.6. Важное отличие состоит в том, что в пункте (2) теоремы 4.6 мы утверждали устойчивость замкнутой орбиты на центральном многообразии. Здесь же в (2) мы утверждаем устойчивость замкнутой орбиты в полной окрестности в $\mathbb{R}^n$. Дело в том, что мы можем свести нашу задачу к той, в которой центральным многообразием является плоскость (x_1, x_2), причем последняя инвариантна относительно потока. Если $(x, 0, \mu)$ лежит на замкнутой орбите периода τ, то

$$d\Phi_{\tau,\mu}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & d_3\Phi_\tau^1(x) \\ a_{21} & a_{22} & d_3\Phi_\tau^2(x) \\ 0 & 0 & d_3\Phi_\tau^3(x) \end{pmatrix}.$$

Из двумерной теоремы мы получим, что спектр верхнего блока на трансверсали к замкнутой орбите лежит в $\{z : |z| < 1\}$, а наши предположения плюс непрерывная зависимость спектра от параметра дают то же самое для $\sigma(d_3\Phi^3_\tau(x))$. Так как спектр отображения Пуанкаре равен спектру отображения $d\Phi_{\tau,\mu}$, ограниченного на подпространство, трансверсальное к замкнутой орбите, то $\sigma(dP(x)) \subset \{z : |z| < 1\}$ и орбита устойчива. $\square$

4.2. Современные методы исследования бифуркации Андронова—Хопфа для функционально-дифференциальных уравнений

В этом пункте изучается метод исследования бифуркации Андронова—Хопфа для бесконечномерных задач, развитый в работе [39]. В теме 5 данный метод будет применен к задаче (1).

Будем изучать периодические решения задачи

$$u'(t) = f(\lambda, u(t)), \tag{4.1}$$

где функция $f : (-1, 1) \times D \to X$, $(\lambda, x) \to f(\lambda, x)$ является гладкой, D и X — банаховы пространства, $D \subset X$, а оператор $A = f_x(0, 0)$ является генератором аналитической полугруппы в X и удовлетворяет некоторым спектральным свойствам (см. (4.9), (4.10)).

Как частный случай, можно рассматривать квазилинейные или существенно нелинейные задачи вида

$$u_t(t, x) = \psi(\lambda, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x)).$$

Главную роль будет играть свойство максимальной регулярности линейной задачи

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ v(0) = v(2\pi). \end{cases} \tag{4.2}$$

В пункте 4.2.1 будет доказано, что если функция f непрерывна по Гельдеру и периодична, то для любого решения v задачи (4.2) функции v' и Av также непрерывны по Гельдеру.

В пункте 4.2.2 мы применим этот результат к изучению задачи (4.1).

4.2.1. Линейная задача. Пусть X, D — банаховы пространства, причем D непрерывно вложено в X. Введем $\widetilde{X} = \{x + iy : x, y \in X\}$ и $\widetilde{D} = \{x + iy : x, y \in D\}$ — комплексные расширения X, D.

Пусть $A : D \to X$ — линейный оператор, и $\widetilde{A} : \widetilde{D} \to \widetilde{X}$, $\widetilde{A}(x + iy) = Ax + iAy$.

Будем предполагать, что

$$\begin{cases} \text{резольвентное множество } \rho(\widetilde{A}) \text{ оператора } \widetilde{A} \\ \text{содержит сектор} \\ S = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi \neq \omega, \ |\arg(\xi - \omega)| < \theta\}, \\ \text{где } \omega \in \mathbb{R}, \ \theta \in (\pi/2, \pi]; \\ \text{существует } M > 0 \text{ такое, что} \\ \|(\xi - A)^{-1}\|_{L(X)} \leqslant M(\xi - \omega)^{-1} \quad \text{при} \quad \xi \in S. \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь $\|\cdot\|_{L(X)}$ обозначает норму ограниченного оператора, действующего в X. Из условия (4.3) следует, что оператор $\widetilde{A}$ является генератором аналитической полугруппы $e^{t\widetilde{A}}$ (не обязательно сильно непрерывной в 0), определенной с помощью интеграла Данфорда

$$e^{t\widetilde{A}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^{\xi t} (\xi - \widetilde{A})^{-1} d\xi, \qquad t > 0,$$

где C — любой путь из $\infty e^{-i\theta}$ в $\infty e^{i\theta}$. Можно показать, что $e^{t\widetilde{A}}(X) \subset X$, так что сужение $e^{t\widetilde{A}}$ на X является аналитической полугруппой e^{tA} в X. Кроме того, если обозначить через $\overline{D}$ замыкание D в X, то e^{tA} сильно непрерывна в $\overline{D}$ и $e^{tA}(X) \subset D$.

При $0 < \gamma < 1$ введем интерполяционное пространство $D_A(\gamma, \infty)$ по формуле

$$D_A(\gamma, \infty) = \left\{ x \in X : [x]_\gamma = \sup_{0<t\leqslant 1} t^{-\gamma} \|e^{tA}x - x\| < +\infty \right\}$$

с нормой

$$\|x\|_\gamma = \|x\| + [x]_\gamma.$$

Рассмотрим линейную задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ u(0) = u(2\pi). \end{cases} \tag{4.4}$$

Здесь $f \in C^\gamma_\#(X)$ $(0 < \gamma < 1)$, где $C^\gamma_\#(X)$ — пространство γ-непрерывных по Гельдеру 2π-периодических функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C^\gamma_\#(X)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\| + \sup_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi} \frac{\|\varphi(t) - \varphi(s)\|}{(t-s)^\gamma}.$$

Мы будем исследовать решения задачи (4.4), принадлежащие пространству $C^{1,\gamma}_\#(X) \cap C^\gamma_\#(D)$, где $C^{1,\gamma}_\#(X)$ — пространство дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ таких, что $\varphi, \varphi' \in C^\gamma_\#(X)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{1,\gamma}_\#(X)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\| + \|\varphi'\|_{C^\gamma_\#(X)}.$$

Нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого можно найти в [39].

Лемма 4.12. *Пусть* $0 < \gamma < 1$, $a < b$ *и* $v \in C^\gamma([a,b]; D) \cap C^{1,\gamma}([a,b]; X)$. *Тогда* $v' \in D_A(\gamma, \infty)$ *при любом* $t \in [a,b]$ *и существует* $K > 0$ *такое, что*

$$\|v'(t)\|_\gamma \leqslant K(\|v\|_{C^\gamma([a,b];D)} + \|v\|_{C^{1,\gamma}([a,b];X)}), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{4.5}$$

Теперь можно приступить к исследованию задачи (4.4). Сначала рассмотрим нерезонансный случай, когда $1 \in \rho(e^{2\pi A})$.

Теорема 4.8. *Пусть выполнено условие* (4.3) *и* 1 *принадлежит резольвентному множеству* $e^{2\pi A}$. *Тогда для любого* $f \in C^{\gamma}_{\#}(X)$ *задача* (4.4) *имеет единственное решение* u, *которое выражается формулой*

$$u(t) = e^{tA}(1 - e^{2\pi A})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(s) ds + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{4.6}$$

Кроме того, $u \in C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X)$ *и существует* $H > 0$ *такое, что*

$$\|u\|_{C^{\gamma}_{\#}(D)} + \|u\|_{C^{1,\gamma}_{\#}(X)} \leqslant H \|f\|_{C^{\gamma}_{\#}(X)}. \tag{4.7}$$

Другими словами, отображение

$$C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X) \to C^{\gamma}_{\#}(X), \qquad u \to u' - Au \tag{4.8}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. При $x \in \overline{D}$ рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

единственное решение которой есть

$$u(t) = e^{tA}x + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Это решение является 2π-периодическим тогда и только тогда, когда

$$x = (1 - e^{2\pi A})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(s) ds.$$

В этом случае u удовлетворяет (4.6) и $u(0) = x \in D$. Чтобы исследовать свойства регулярности для u, положим $u = u_1 + u_2$, где u_1 и u_2

соответственно являются периодическими решениями уравнений

$$u_1'(t) = Au_1(t) + f(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

$$u_2'(t) = Au_2(t) + f(t) - f(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Из (4.6) получим

$$u_1(t) = e^{tA}(1 - e^{2\pi A})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(0) ds + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(0) ds,$$

откуда

$$Au_1(t) = -f(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

В частности, поскольку $f(0)$ в X произвольно, заключаем, что $0 \in \rho(A)$ и $u_1(t) = -A^{-1}f(0)$. Так как из (4.3) следует, что норма графика A эквивалентна норме в D, получим $u_1 \in C^\gamma_\#(D) \cap C^{1,\gamma}_\#(X)$.

Вновь используя (4.6), имеем

$$u_2(t) = e^{tA}(1 - e^{2\pi A})^{-1}\varphi(2\pi) + \varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t e^{(t-s)A}(f(s) - f(0)) ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

принадлежит $C^\gamma_\#(D) \cap C^{1,\gamma}_\#(X)$ и является решением задачи

$$\begin{cases} \varphi'(t) = A\varphi(t) + f(t) - f(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Кроме того, существует $H_1 > 0$ такое, что

$$\|\varphi\|_{C^\gamma([0,2\pi];D)} + \|\varphi\|_{C^{1,\gamma}([0,2\pi];X)} \leqslant H_1 \|f\|_{C^\gamma([0,2\pi];X)}.$$

По лемме 4.12 $\varphi'(2\pi) = A\varphi(2\pi)$ принадлежит $D_A(\gamma, \infty)$, так что $A(1 - e^{2\pi A})^{-1}\varphi(2\pi)$ принадлежит $D_A(\gamma, \infty)$. Отсюда следует, что

$$u_2 \in C^\gamma([0, 2\pi]; D) \cap C^{1,\gamma}([0, 2\pi]; X),$$

откуда легко следует (4.7). $\square$

Теперь рассмотрим резонансный случай. Предположим, что

$$\begin{cases} \text{а) } i\text{ — простое изолированное собственное значение } \widetilde{A}, \\ \text{б) } 1\text{ — изолированное собственное значение } e^{2\pi\widetilde{A}} \text{ с ал-} \\ \quad \text{гебраической кратностью } 2. \end{cases} \tag{4.9}$$

Отметим, что условие (4.9) выполняется, если

$$\begin{cases} \text{а) } (\xi-\widetilde{A})^{-1}\text{ — компактный оператор при } \xi\in S, \\ \text{б) } i\text{ — простое собственное значение } \widetilde{A}, \\ \text{в) } ni\in\rho(\widetilde{A}),\ n=0,2,3,\ldots \end{cases} \tag{4.10}$$

В силу (4.9)-(а) существуют $x_0, y_0 \in D$ такие, что

$$\widetilde{A}(x_0 \pm iy_0) = \pm i(x_0 \pm iy_0), \tag{4.11}$$

то есть

$$Ax_0 = -y_0; \qquad Ay_0 = x_0. \tag{4.12}$$

Кроме того,

$$e^{t\widetilde{A}}(x_0 + iy_0) = e^{it}(x_0 + iy_0), \tag{4.13}$$

откуда

$$e^{tA}x_0 = x_0\cos t - y_0\sin t, \qquad e^{tA}y_0 = x_0\sin t + y_0\cos t. \tag{4.14}$$

Пусть X_0 — подпространство X, натянутое на x_0, y_0, и $\widetilde{X}_0\{x+iy : x, y \in X_0\}$. Тогда проектор на $\widetilde{X}_0$ задается формулой

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{\gamma(i,\varepsilon)}(\xi-\widetilde{A})^{-1}d\xi + \int\limits_{\gamma(-i,\varepsilon)}(\xi-\widetilde{A})^{-1}d\xi\right],$$

где $\gamma(\pm i,\varepsilon)$ — контур $\{z \in C : |z \mp i| = \varepsilon\}$, ориентированный против часовой стрелки, а ε достаточно мало.

Имеем

$$Q = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\cos\theta + \sin\theta\widetilde{A})(\varepsilon\cos\theta + i(1+\varepsilon\sin\theta) - \widetilde{A})^{-1} \times$$
$$\times(\varepsilon\cos\theta - i(1+\varepsilon\sin\theta) - \widetilde{A})^{-1}d\theta,$$

так что, поскольку $(\xi - \widetilde{A})^{-1}(\overline{\xi} - \widetilde{A})^{-1}(X) \subset X$ при $\xi, \overline{\xi} \in \rho(\widetilde{A})$, то $Q(X) \subset X$. Кроме того, если X_0 — ядро оператора $(1 - e^{2\pi A})$, то, полагая

$$X_1 = (1 - Q)(X), \qquad A_1 x = Ax \quad \text{при} \quad x \in D \cap X_1,$$

получим сужение e^{tA} на X_1 по формуле

$$e^{tA_1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^{\xi t} (\xi - \widetilde{A}_1)^{-1} d\xi.$$

Существуют φ_0, η_0, принадлежащие сопряженному пространству X^*, такие, что

$$\begin{cases} Qx = \langle x, \varphi_0 \rangle x_0 + \langle x, \eta_0 \rangle y_0 \quad \text{при} \quad x \in X, \\ \langle x_0, \varphi_0 \rangle = \langle y_0, \eta_0 \rangle = 1, \quad \langle x_0, \eta_0 \rangle = \langle y_0, \varphi_0 \rangle = 0, \end{cases} \tag{4.15}$$

откуда

$$\begin{cases} (e^{tA})^* \varphi_0 = \varphi_0 \cos t + \eta_0 \sin t, \quad (e^{tA})^* \eta_0 = \varphi_0 \sin t - \eta_0 \cos t, \\ A^* \varphi_0 = \eta_0, \quad A^* \eta_0 = -\varphi_0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Теперь мы можем сформулировать теорему о существовании решений задачи (4.4).

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия* (4.3) *и* (4.9), *а также* $f \in C^{\gamma}_{\#}(X)$. *Тогда задача* (4.4) *имеет решения тогда и только тогда, когда*

$$Q \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(s) ds = 0. \tag{4.17}$$

В этом случае все решения определяются по формуле

$$u(t) = c_1 e^{tA} x_0 + c_2 e^{tA} y_0 + e^{tA} (1 - e^{2\pi A_1})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(s) ds + \\ + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds; \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{4.18}$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Кроме того,* $u \in C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X)$.

Доказательство. Обозначим $u_0 = Qu$, $u_1 = (1-Q)u$, $f_0 = Qf$, $f_1 = (1-Q)f$, $A_0 = QA$. Тогда задача (4.4) разделяется на две задачи:

$$\begin{cases} u_0'(t) = A_0 u_0(t) + f_0(t), & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ u_0(0) = u_0(2\pi); \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\begin{cases} u_1'(t) = A_1 u_1(t) + f_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ u_1(0) = u_1(2\pi); \end{cases} \tag{4.20}$$

Вследствие (4.9) задача (4.20) имеет единственное решение u_1, которое представляется в виде

$$u_1(t) = e^{tA_1}(1 - e^{2\pi A_1})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A_1} f_1(s)ds + \int\limits_0^t e^{(t-s)A_1} f_1(s)ds. \tag{4.21}$$

Кроме того, если u_0 — решение (4.19), то

$$u_0(t) = e^{tA_0} u_0(0) + \int\limits_0^t e^{(t-s)A_0} f_0(s)ds. \tag{4.22}$$

Таким образом, при $t = 2\pi$ получим

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A_0} f_0(s)ds = 0, \tag{4.23}$$

что совпадает с (4.17). В силу (4.23) получим, что (4.22) при $u_0(0) = c_1 x_0 + c_2 y_0$ дает все решения задачи (4.19). Из равенств (4.21) и (4.22) следует формула (4.18).

Наконец, регулярность u_1 доказывается такими же рассуждениями, как и в доказательстве теоремы 4.8, а регулярность u_0 вытекает из равенств (4.14). □

4.2.2. Нелинейная задача. Будем рассматривать периодические решения нелинейного уравнения

$$u'(\tau) = f(\lambda, u(\tau)), \qquad \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.24}$$

где

$$\begin{cases} f \in C^\infty((-1,1)\times D; X), \\ f(\lambda,0)=0, \quad -1<\lambda<1, \\ A = f_x(0,0) \text{ удовлетворяет (4.3) и (4.9).} \end{cases} \tag{4.25}$$

Поскольку линейная задача $u'(\tau) = Au(\tau)$ имеет 2π-периодические решения (см. пункт 4.2.1), будем искать решения уравнения (4.24) с периодом, близким к $2\pi\rho$, где ρ близко к 1. Полагая $t = \tau/\rho$, приведем задачу к виду

$$\begin{cases} u'(t) = \rho f(\lambda, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u(2\pi). \end{cases} \tag{4.26}$$

Чтобы решить задачу (4.26), нам понадобятся некоторые свойства собственных значений оператора

$$A(\lambda) = f_x(\lambda, 0). \tag{4.27}$$

Лемма 4.13. *Пусть выполнены условия* (4.25). *Тогда существует* $\widetilde{\lambda} \in (0,1)$ *и* $\alpha, \beta \in C^\infty((-\widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}); \mathbb{R})$, $x, y \in C^\infty((-\widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}); D)$ *такие, что*

$$\begin{cases} A(\lambda)x(\lambda) = \alpha(\lambda)x(\lambda) - \beta(\lambda)y(\lambda), \\ A(\lambda)y(\lambda) = \beta(\lambda)x(\lambda) + \alpha(\lambda)y(\lambda). \end{cases} \tag{4.28}$$

Доказательство. Обозначим $\widetilde{A}(\lambda) : \widetilde{D} \to \widetilde{X}$, $\widetilde{A}(\lambda)x + i\widetilde{A}(\lambda)y$. Функция $\lambda \to \widetilde{A}(\lambda)$ принадлежит $C^\infty((-1,1); L(\widetilde{D}, \widetilde{X}))$ и существует $\lambda_0 \in (0,1)$ такое, что при $|\lambda| < \lambda_0$ оператор

$$P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(i,\varepsilon)} (\xi - \widetilde{A}(\lambda))^{-1} d\xi \tag{4.29}$$

корректно определен, а функция $\lambda \to P(\lambda)$ принадлежит $C^\infty((-\lambda_0, \lambda_0); L(\widetilde{X}))$.

Полагая

$$U(\lambda) = P(\lambda)P(0) + (1 - P(\lambda))(1 - P(0)),$$

получим, что $U \in C^\infty((-\lambda_0,\lambda_0); L(\widetilde{X}))$, $U(\lambda)(\widetilde{D}) \subset \widetilde{D}$ и $U(\lambda)P(0) = P(\lambda)U(\lambda)$. Следовательно, поскольку $U(0) = 1$, существует $\lambda_1 \in (0,\lambda_0]$ такое, что функция $U(\lambda)$ обратима при $-\lambda_1 < \lambda < \lambda_1$ и

$$P(\lambda) = U(\lambda)P(0)U(\lambda)^{-1}. \tag{4.30}$$

Учитывая, что $P(0)(\widetilde{X})$ — подпространство, натянутое на w_0, и используя (4.30), убеждаемся, что $P(\lambda)(\widetilde{X})$ натянуто на $w(\lambda) = U(\lambda)w_0$. Поскольку $\widetilde{A}(\lambda)$ отображает $P(\lambda)(\widetilde{X})$ в себя, существует $z(\lambda) \in \mathbb{C}$ такое, что $\widetilde{A}(\lambda)w(\lambda) = z(\lambda)w(\lambda)$, и при достаточно малых λ выполнено

$$z(\lambda) = \frac{\langle \widetilde{A}(\lambda)w(\lambda), \zeta_0\rangle}{\langle w(\lambda), \zeta_0\rangle},$$

причем $z \in C^\infty((-\widetilde{\lambda},\widetilde{\lambda});\mathbb{C})$ при некотором $\widetilde{\lambda} \in (0,1)$.

Теперь достаточно при $|\lambda| < \widetilde{\lambda}$ выбрать

$$w(\lambda) = x(\lambda) + iy(\lambda),$$
$$z(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda),$$

где $x(\lambda), y(\lambda) \in X$ и $\alpha(\lambda), \beta(\lambda) \in \mathbb{R}$. $\square$

Теперь сформулируем теорему о существовании решений задачи (4.26).

Теорема 4.10. *Пусть выполнено условие* (4.25) *и* $\alpha'(0) \neq 0$, *где* α *дается леммой* 4.13. *Выберем некоторое* $\gamma \in (0,1)$.

Тогда существует $\sigma_0 > 0$ *и* C^∞*-гладкие функции* $\lambda : (-\sigma_0,\sigma_0) \to \mathbb{R}$, $\sigma \to \lambda(\sigma)$, $\rho : (-\sigma_0,\sigma_0) \to \mathbb{R}$, $\sigma \to \rho(\sigma)$, $u : (-\sigma_0,\sigma_0) \to C^\gamma_\#(D) \cap C^{1,\gamma}_\#(X)$, $\sigma \to u(\sigma)(\cdot)$ *такие, что*

$$\begin{cases} \lambda(0) = 0, \quad \rho(0) = 0, \quad u(0)(t) = 0 \quad \textit{при} \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(\sigma)(\cdot) \ \textit{не является константой при } \sigma \neq 0, \end{cases} \tag{4.31}$$

а также для $u(t,\sigma) = u(\sigma)(t)$ выполнено

$$\begin{cases} u_t(t,\sigma) = \rho(\sigma) f(\lambda(\sigma), u(t,\sigma)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(2\pi,\sigma) = u(0,\sigma). \end{cases} \tag{4.32}$$

Кроме того, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $\overline{\lambda}, \overline{\rho} \in \mathbb{R}$ и $\overline{u} \in C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} \overline{u}'(t) = \overline{\rho} f(\overline{\lambda}, \overline{u}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ |\overline{\lambda}| < \varepsilon_0, \quad |1-\overline{\rho}| < \varepsilon_0, \quad \|\overline{u}\|_{C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X)} < \varepsilon_0, \end{cases} \tag{4.33}$$

то существуют $\theta \in [0,2\pi)$ и $\sigma \in (-\sigma_0, \sigma_0)$ такие, что

$$\overline{\lambda} = \lambda(\sigma), \quad \overline{\rho} = \rho(\sigma), \quad \overline{u}(t) = u(\sigma)(t+\theta). \tag{4.34}$$

Доказательство. Введем отображение

$$\begin{cases} F : (-1,1) \times (0,2) \times C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X) \to C^{\gamma}_{\#}(X), \\ F(\lambda,\rho,u) = u' - \rho f(\lambda,u). \end{cases}$$

Тогда F принадлежит классу C^{∞} и

$$F_u(\lambda,\rho,u)v = v' - \rho f_x(\lambda,u)v. \tag{4.35}$$

В частности,

$$F_u(0,1,0)v = v' - Av.$$

По теореме 4.9 получим, что

$$\begin{cases} \mathcal{N}(F_u(0,1,0)) = \{e^{tA} : x \in X_0\}, \quad \dim \mathcal{N}(F_u(0,1,0)) = 2, \\ \mathcal{R}(F_u(0,1,0)) = \left\{ z \in C^{\gamma}_{\#}(X) : Q \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} z(s)ds = 0 \right\}, \\ \operatorname{codim} \mathcal{R}(F_u(0,1,0)) = 2, \end{cases} \tag{4.36}$$

где $\mathcal{N}, \mathcal{R}$ соответственно обозначают ядро и образ оператора. Обозначим через $V \subset C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X)$ такое подпространство, что

$$C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X) = \mathcal{N}(F_u(0,1,0)) \oplus V.$$

Введем теперь отображение

$$G : (-1, 1) \times (-1, 1) \times (0, 2) \times V \to C^\gamma_\#(X)$$

$$G(\sigma, \lambda, \rho, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} F(\lambda, \rho, \sigma(e^{tA}x_0 + v)), & \sigma \neq 0, \\ F_u(\lambda, \rho, 0)(e^{tA}x_0 + v), & \sigma = 0. \end{cases}$$

Тогда G непрерывно дифференцируемо и $G(0, 0, 1, 0) = 0$.

Чтобы по теореме о неявной функции найти $\lambda = \lambda(\sigma)$, $\rho = \rho(\sigma)$, $v = v(\sigma)$, удовлетворяющие равенству $G(\sigma, \lambda(\sigma), \rho(\sigma), v(\sigma)) = 0$, достаточно доказать, что отображение

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{R}^2 \times V \to C^\gamma_\#(X), \\ \Phi(\widehat{\lambda}, \widehat{\rho}, \widehat{v}) = G_\lambda(0, 0, 1, 0)\widehat{\lambda} + G_\rho(0, 0, 1, 0)\widehat{\rho} + G_v(0, 0, 1, 0)\widehat{v} \end{cases}$$

является изоморфизмом. Из равенств (4.35) и (4.27) при $|\lambda| \leqslant \widetilde{\lambda}$ получим

$$\Phi(\widehat{\lambda}, \widehat{\rho}, \widehat{v}) = -A'(0)e^{tA}x_0\widehat{\lambda} + e^{tA}y_0\widehat{\rho} + F_u(0, 1, 0)\widehat{v}.$$

Покажем, что Φ инъективно: если $\Phi(\widehat{\lambda}, \widehat{\rho}, \widehat{v}) = 0$, то

$$-\int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A}A'(0)e^{tA}x_0 ds\widehat{\lambda} + 2\pi y_0\widehat{\rho} + \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A}(F_u(0, 1, 0)\widehat{v})(s)ds = 0.$$

Применяя φ_0 и учитывая (4.15) и (4.36), получим

$$\int_0^{2\pi} \langle e^{(2\pi - s)A}A'(0)e^{sA}x_0,\ \varphi_0\rangle ds = 0. \tag{4.37}$$

С другой стороны, из (4.16) и равенств

$$A'(0)x_0 = -Ax'(0) + \alpha'(0)x_0 - \beta'(0)y_0 - y'(0),$$

$$A'(0)y_0 = -Ay'(0) + \beta'(0)x_0 + \alpha'(0)y_0 + x'(0)$$

(которые следуют из (4.28)) получим

$$\int_0^{2\pi} \langle e^{(2\pi - s)A}A'(0)e^{tA}x_0,\ \varphi_0\rangle ds = 2\pi\alpha'(0). \tag{4.38}$$

Поэтому из (4.37) следует, что $\widehat{\lambda} = 0$, откуда $\widehat{\rho} = 0$, $\widehat{v} = 0$.

Докажем, что Φ сюръективно. Достаточно доказать, что пространство $C^{\gamma}_{\#}(X)$ натянуто на $\mathcal{R}(F_u(0,1,0)) \cup \{\psi_1, \psi_2\}$, где

$$\psi_1(t) = A'(0)e^{tA}x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$\psi_2(t) = e^{tA}y_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функции ψ_1, ψ_2 независимы: действительно, если $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 = 0$, то

$$c_1 \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A}A'(0)e^{tA}x_0 ds + 2\pi c_2 y_0 = 0.$$

Применяя φ_0, получим, что $2\pi c_1 \alpha'(0) = 0$, откуда $c_1 = c_2 = 0$, что доказывает независимость ψ_1, ψ_2. Поскольку $\psi_1, \psi_2 \notin \mathcal{R}(F_u(0,1,0))$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(F_u(0,1,0)) = 2$ (см. (4.36)), получаем, что Φ — изоморфизм.

По теореме о неявной функции существуют $\sigma_0 \in (0,1)$, $r_0 > 0$ и функции $\lambda : (-\sigma_0, \sigma) \to \mathbb{R}$, $\rho : (-\sigma_0, \sigma) \to \mathbb{R}$, $v : (-\sigma_0, \sigma) \to V$, $\lambda = \lambda(\sigma)$, $\rho = \rho(\sigma)$, $v = v(\sigma)$ такие, что

$$\begin{cases} \sigma \in (-\sigma_0, \sigma), \quad |\lambda| < r_0, \quad |\rho - 1| < r_0, \quad \|v\|_V = \|v\|_{C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X)} < r_0, \\ G(\sigma, \lambda, \rho, v) = 0. \end{cases} \tag{4.39}$$

Для любого $\sigma \in (-\sigma_0, \sigma_0)$ положим

$$u(\sigma)(t) = \sigma(e^{tA}x_0 + v(\sigma)(t)). \tag{4.40}$$

Тогда $u(\sigma)$ является решением задачи (4.26) при $\lambda = \lambda(\sigma)$, $\rho = \rho(\sigma)$.

Теперь докажем единственность. Положим $V = P_V(X)$, где

$$(P_V u)(t) = v(t) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \langle e^{(2\pi - s)A}v(s),\ \varphi_0 \rangle ds\, e^{tA}x_0 -$$
$$- \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \langle e^{(2\pi - s)A}v(s),\ \eta_0 \rangle ds\, e^{tA}y_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.41}$$

Пусть $\overline{\lambda}, \overline{\rho} \in \mathbb{R}$, $\overline{u} \in C^{\gamma}_{\#}(D) \cap C^{1,\gamma}_{\#}(X)$ удовлетворяют (4.33) при некотором ε_0, которое будет определено ниже. Существуют σ_1, σ_2 такие, что

$$\overline{u}(t) = \sigma_1 e^{tA} x_0 + \sigma_2 e^{tA} y_0 + \overline{v}(t), \qquad \overline{v} = P_V \overline{u}.$$

Выберем $\theta \in [0, 2\pi)$ такое, что $\overline{u}(t+\theta) = \sigma e^{tA} x_0 + \overline{v}(t+\theta)$ при некотором $\sigma \in \mathbb{R}$, и положим $\widehat{u}(t) = \overline{u}(t+\theta)$, $\widehat{v}(t) = \overline{v}(t+\theta)$, так что

$$\widehat{u}(t) = \sigma e^{tA} x_0 + \widehat{v}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что из (4.41) вытекает, что $\widehat{v} \in V$.

Теперь требуется доказать, что при достаточно малых ε_0 выполнено

$$|\sigma| < \sigma_0, \quad |\overline{\lambda}| < r_0, \quad \frac{1}{|\sigma|}\|\widehat{v}\|_V < r_0, \quad |1 - \overline{\rho}| < r_0, \tag{4.42}$$

где r_0 — такое же, как в (4.39). Если соотношения (4.42) верны, то получим, что $\overline{\lambda} = \lambda(\sigma)$, $\overline{\rho} = \rho(\sigma)$, $\widehat{u} = u(\sigma)$.

Чтобы найти подходящее ε_0, сначала заметим, что поскольку

$$\Phi(\lambda, \rho, v) = -A'(0) e^{tA} x_0 \lambda + e^{tA} y_0 \rho + v - Av$$

является изоморфизмом из $\mathbb{R}^2 \times V$ в $C^{\gamma}_{\#}(X)$, существует константа $k > 0$ такая, что

$$\begin{aligned}
&|\sigma\overline{\lambda}| + |(1-\overline{\rho})\sigma| + \|\widehat{v}\|_V \leqslant \\
&\qquad \leqslant k\| - A'(0) e^{tA} x_0 \overline{\lambda}\sigma + e^{tA} y_0 (1 - \overline{\rho})\sigma + \widehat{v}' - A\widehat{v}\|_{C^{\gamma}_{\#}(X)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant k\{\|A'(0) e^{tA} x_0\|_{C^{\gamma}_{\#}}(X)|\sigma||\overline{\lambda}| + \|e^{tA} y_0\|_{C^{\gamma}_{\#}(X)}|\sigma||\overline{\rho} - 1| + \\
&\qquad\qquad + \|A\widehat{v}\|_{C^{\gamma}_{\#}}(X)|\overline{\rho} - 1| + \|y_0\||\sigma||\overline{\rho} - 1| + \\
&\qquad\qquad\qquad + \|f(\overline{\lambda}, \sigma e^{tA} x_0 + \widehat{v}) - A(\sigma e^{tA} x_0 + \widehat{v})\|_{C^{\gamma}_{\#}}(X)\}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Поэтому из равенств

$$f(\overline{\lambda}, \sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t)) - A(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t)) =$$

$$= \int\limits_0^1 d\theta \int\limits_0^1 d\eta \Big[f_{xx}(\overline{\lambda}, \theta\eta(e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t))(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t),\ \sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t)))\eta +$$

$$+ f_{x\lambda}(\overline{\lambda}\theta, 0)(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t))\overline{\lambda}\Big]$$

и

$$f(\overline{\lambda}, \sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t)) - A(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t)) - f(\overline{\lambda}, \sigma e^{sA}x_0 + \widehat{v}(s)) + A(\sigma e^{sA}x_0 + \widehat{v}(s)) =$$

$$= \int\limits_0^1 d\theta \int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^1 d\xi \Big[f_{xxx}(\overline{\lambda}, \theta\eta\xi(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t)) + (1-\xi)\theta\eta(\sigma e^{sA}x_0 + \widehat{v}(s))) \times$$

$$\times (\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t),\ \sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t),\ \theta\eta(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t) - \sigma e^{sA}x_0 - \widehat{v}(s))) +$$

$$+ f_{xx}(\overline{\lambda}, \theta\eta(\sigma e^{sA}x_0 + \widehat{v}(s))((\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t),\ \sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t))) -$$

$$-(\sigma e^{sA}x_0 + \widehat{v}(s),\ \sigma e^{sA}x_0 + \widehat{v}(s))) + f_{x\lambda}(\overline{\lambda}\theta, 0)(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t) - \sigma e^{sA}x_0 - \widehat{v}(s))\Big]$$

следует, что существует $k_1 > 0$ такое, что

$$\|f(\overline{\lambda}, \sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t)) - A(\sigma e^{tA}x_0 + \widehat{v}(t))\|_{C^\gamma_\#(X)} \leqslant$$

$$\leqslant k_1(|\overline{\lambda}|\|\widehat{v}\|_V + |\sigma^3| + \|\widehat{v}\|^3_V + |\sigma|^2 + \|\widehat{v}\|^2_V + |\overline{\lambda}\sigma|).$$

Учитывая неравенства (4.43), отсюда получим, что существует $k_2 > 1$ такое, что

$$\|\widehat{v}\|_V \leqslant k_2(|\overline{\rho} - 1||\sigma| + |\overline{\lambda}||\sigma| + |\overline{\rho} - 1|\|\widehat{v}\| +$$

$$+ |\overline{\lambda}|\|\widehat{v}\|_V + |\sigma|^2 + \|\widehat{v}\|^2_V + |\sigma|^3 + \|\widehat{v}\|^3_V). \quad (4.44)$$

Теперь пусть $\varepsilon_0 < r_0$ таково, что

$$\|1 - P_V\|_{L(C^\gamma_\#(D)\cap C^{1,\gamma}_\#(X))}\varepsilon_0 < \sigma_0\|e^{tA}x_0\|_{C^\gamma_\#(D)\cap C^{1,\gamma}_\#(X)}, \quad (4.45)$$

$$k_2(2\varepsilon_0 + \|P_V\|_{L(C^\gamma_\#(D)\cap C^{1,\gamma}_\#(X))}\varepsilon_0 + \|P_V\|^2_{L(C^\gamma_\#(D)\cap C^{1,\gamma}_\#(X))}\varepsilon_0^2) < 1/2, \quad (4.46)$$

$$2k_2(2 + \sigma_0 + \sigma_0^2) < r_0. \quad (4.47)$$

Тогда $\|\widehat{v}\|_V \leqslant \|P_V\|_{\varepsilon_0}$ и, с учетом (4.45), $|\sigma| < \sigma_0$. Из (4.46) следует, что

$$\|\widehat{v}\|_V < 2k_2(|\overline{p} - 1||\sigma| + |\overline{\lambda}||\sigma| + |\sigma|^2 + |\sigma|^3).$$

Поэтому из (4.47) следует, что

$$\frac{1}{|\sigma|}\|\widehat{v}\|_V < r_0.$$

Доказательство завершено. □

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$u_t(t,x) = \varphi(\lambda, u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x)), \tag{4.48}$$

где функция $(\lambda, p) \to \varphi(\lambda, p)$ принадлежит $C^\infty((-1,1) \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. Положим $X = C_\#(\mathbb{R})$ и $D = C^2_\#(\mathbb{R}) = \{\psi \in C^2([0,2\pi];\mathbb{R}) : \psi(0) = \psi(2\pi)$, $\psi'(0) = \psi'(2\pi),\ \psi''(0) = \psi''(2\pi)\}$. Функция $f(\lambda, u) = \psi(\lambda, u, u', u'')$ принадлежит $C^\infty((-1,1) \times D; X)$.

Предположим, что при некотором $k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_{p_3}(0,0) > 0, \tag{4.49}$$

$$\varphi_{p_1}(0,0) = k^2\varphi_{p_3}(0,0), \quad k\varphi_{p_2}(0,0) = 1, \tag{4.50}$$

$$\varphi_{p_1\lambda}(0,0) \neq k^2\varphi_{p_3\lambda}(0,0). \tag{4.51}$$

В силу (4.49) уравнение (4.48) — параболическое при малых λ, u.

Во введенных обозначениях получим

$$A(\lambda)v = \varphi_{p_1}(\lambda,0)v + \varphi_{p_2}(\lambda,0)v' + \varphi_{p_3}(\lambda,0)v'', \quad v \in D,$$

так что собственные значения оператора $\widetilde{A}(\lambda)$ выражаются формулой

$$\varphi_{p_1}(\lambda,0) + ih\varphi_{p_2}(\lambda,0) - h^2\varphi_{p_3}(\lambda,0), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что из (4.49) следует, что $A = f_u(0,0)$ удовлетворяет условию (4.3). Кроме того, в силу предположения (4.50), A удовлетворяет условию (4.10). Наконец, условие трансверсальности $\alpha'(0) \neq 0$ имеет место в силу (4.51). Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.10.

□

Тема 5

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА—ХОПФА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой теме мы изучим существование периодических решений задачи (1) (см. введение), соответствующих наблюдаемым нелинейным оптическим эффектам. Сначала рассмотрим случай, когда линеаризованный оператор задачи является нормальным. При этом используются результаты темы 2. Затем изучим ситуацию, когда указанный оператор не является нормальным. Для этого применим метод исследования бифуркации Андронова—Хопфа, изложенный в пункте 4.2 темы 4.

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим квазилинейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение с конечным числом преобразований переменных в младших членах:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos(u(g_i(x),t))\Big). \tag{5.1}$$

Здесь $x \in Q$, $t \in \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $D > 0$, $K, \gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ — постоянные коэффициенты, не равные нулю; $g_i : V \to g_i(V)$ — взаимно однозначные преобразования, $V \in \mathbb{R}^n$, $\overline{Q} \subset V$. Всюду далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 5.1. $g_i(Q) \cap Q \neq \varnothing$, $g_i(x) \not\equiv x$ $(x \in Q)$, $i = 1, \ldots, N$.

Уравнение (5.1) рассматривается с краевыми условиями Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\right|_{\partial Q \times \mathbb{R}} = 0, \tag{5.2}$$

где $\widetilde{\nu} = (\nu, 0)$, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке x.

В случае, если $g_i(Q) \setminus Q \neq \varnothing$ при некоторых i, зададим значения неизвестной функции $u(x,t)$ вне области Q:

$$u(g_i(x), t) = 0, \quad x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5.3}$$

В соответствии с этим введем линейные операторы G_i, $i = 1, \ldots, N$, по формуле

$$(G_i u)(x,t) = \begin{cases} u(g_i(x), t), & x \in \{x \in Q : g_i(x) \in Q\}, \\ 0, & x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}. \end{cases}$$

Также будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 5.2. *Операторы* $G_i : L_p(Q) \to L_p(Q)$, $i = 1, \ldots, N$, *ограничены.*

5.2. Линеаризация

В этом пункте изучим некоторые свойства линеаризованного варианта задачи (5.1)–(5.3), которые в дальнейшем будут использоваться для изучения бифуркации периодических решений исходной задачи (5.1)–(5.3).

Решение u задачи (5.1)–(5.3) называется *пространственно-однородным стационарным решением*, если оно не зависит от $x \in Q$ и $t \in \mathbb{R}$.

Из уравнений (5.1) и (5.3) для пространственно-однородного стационарного решения w получим

$$w(x) = K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w(g_i(x))\Big), \quad x \in Q, \tag{5.4}$$

$$w(g_i(x)) = 0, \quad x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{5.5}$$

По определению,

$$w(x) = \mathrm{const}, \quad x \in Q. \tag{5.6}$$

Рассмотрим следующее условие.

Условие 5.3. $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}} \gamma_i \neq \sum\limits_{i\in\mathcal{M}} \gamma_i$ *для любых* $\mathcal{K}, \mathcal{M} \subseteq \{1, \dots, N\}$ *таких, что* $\mathcal{K} \neq \mathcal{M}$.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* 5.1 *и* 5.3 *и существует* k *такое, что* $g_k(Q) \setminus Q \neq \varnothing$. *Тогда задача* (5.4)–(5.6) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i\Big) = 2\pi m \tag{5.7}$$

для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. *В этом случае решение единственно, причем* $w = 2\pi m$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке $x^0 \in Q$ имеет место $g_i(x^0) \in Q$, $i \in \mathcal{K}^0 \subseteq \{1, \dots, N\}$ и $g_i(x^0) \notin Q$, $i \in \overline{\mathcal{K}^0} = \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{K}^0$. В силу условия 5.1 и условия леммы $g_k(Q) \setminus Q \neq \varnothing$ можно выбрать точку x^1 такую, что $g_i(x^1) \in Q$, $i \in \mathcal{K}^1 \subseteq \{1, \dots, N\}$ и $g_i(x^1) \notin Q$, $i \in \overline{\mathcal{K}^1}$, причем $\mathcal{K}^0 \neq \mathcal{K}^1$.

Тогда из уравнений (5.4)–(5.6) при $x = x^0$ и $x = x^1$ соответственно получим

$$w = K\Big(1 + \sum_{i\in\mathcal{K}^0} \gamma_i \cos w + \sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^0}} \gamma_i\Big), \quad w = K\Big(1 + \sum_{i\in\mathcal{K}^1} \gamma_i \cos w + \sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^1}} \gamma_i\Big). \tag{5.8}$$

Приравнивая правые части этих уравнений, придем к равенству

$$\sum_{i\in\mathcal{K}^0}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^0}}\gamma_i=\sum_{i\in\mathcal{K}^1}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^1}}\gamma_i,$$

откуда, приводя подобные слагаемые и учитывая, что $\overline{\mathcal{K}^1}\setminus\overline{\mathcal{K}^0}=\mathcal{K}^0\setminus\mathcal{K}^1$, получим

$$\Big(\sum_{i\in\mathcal{K}^0\setminus\mathcal{K}^1}\gamma_i-\sum_{i\in\mathcal{K}^1\setminus\mathcal{K}^0}\gamma_i\Big)\cos w=\sum_{i\in\mathcal{K}^0\setminus\mathcal{K}^1}\gamma_i-\sum_{i\in\mathcal{K}^1\setminus\mathcal{K}^0}\gamma_i.$$

В силу условия 5.3 получим, что $\cos w=1$, $w=2\pi m$ ($m\in\mathbb{Z}$). Тогда из соотношений (5.8) получим (5.7). $\square$

Замечание 5.1. Пусть условие 5.3 не выполняется, т. е. существуют такие $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}\neq\mathcal{M}$, что $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}}\gamma_i=\sum\limits_{i\in\mathcal{M}}\gamma_i$. Без ограничения общности предположим, что $\mathcal{K}\cap\mathcal{M}=\varnothing$. Тогда существуют преобразования $g_1,\ldots,g_N$ такие, что задача (5.4)–(5.6) имеет решения, отличные от решений, описанных в лемме 5.1.

Доказательство. Действительно, разобьем область Q на две подобласти Q_1 и Q_2 такие, что $\overline{Q_1}\cup\overline{Q_2}=\overline{Q}$ и $Q_1\cap Q_2=\varnothing$. Пусть

$$g_i(Q_1)\cap Q=\varnothing,\quad g_i(Q_2)\subseteq Q,\quad i\in\mathcal{K};$$

$$g_i(Q_2)\cap Q=\varnothing,\quad g_i(Q_1)\subseteq Q,\quad i\in\mathcal{M};$$

$$g_i(Q)\subseteq Q,\quad i\in\{1,\ldots,N\}\setminus(\mathcal{K}\cup\mathcal{M}).$$

Тогда из уравнений (5.4)–(5.6) при $x^1\in Q_1$ и $x^2\in Q_2$ соответственно получим

$$w=K\Big(1+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}}}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\mathcal{K}}\gamma_i\Big),\qquad w=K\Big(1+\sum_{i\in\overline{\mathcal{M}}}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\mathcal{M}}\gamma_i\Big).$$

Поскольку из равенства $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}}\gamma_i=\sum\limits_{i\in\mathcal{M}}\gamma_i=b$ следует $\sum\limits_{i\in\overline{\mathcal{K}}}\gamma_i=\sum\limits_{i\in\overline{\mathcal{M}}}\gamma_i=a$, то каждое из полученных уравнений равносильно уравнению

$$w=K\left(1+a\cos w+b\right),$$

которое имеет не менее одного решения при любых K,a,b. $\square$

Будем считать K бифуркационным параметром. Пусть w — решение задачи (5.4)–(5.6) для некоторого значения параметра K. Положим $u(x,t) = w + v(x,t)$. Тогда

$$v_t = \Lambda v + \mathcal{N}(v), \tag{5.9}$$

где

$$\Lambda v = D\Delta v - v - K\sum_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i} \sin w_{g_i}, \tag{5.10}$$

$$\mathcal{N}(v) = K\sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Big(\cos(w_{g_i} + v_{g_i}) - \cos w_{g_i} + v_{g_i} \sin w_{g_i}\Big). \tag{5.11}$$

Здесь $v_{g_i} = v(g_i(x))$, $w_{g_i} = w(g_i(x))$.

Будем рассматривать оператор $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda) = \{v \in W_p^2(Q) : (\partial v/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$, определенный по формуле (5.10).

Если выполнены условия леммы 5.1, то в силу этой леммы

$$w_{g_i} = w(g_i(x)) = \begin{cases} 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}), & g_i(x) \in Q, \\ 0, & g_i(x) \notin Q \end{cases}$$

и $\sin w_{g_i} = 0$. Тогда $\Lambda v = D\Delta v - v$. Известно, что оператор $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, определенный по этой формуле, самосопряженный, спектр $\sigma(\Lambda)$ дискретный и $\sigma(\Lambda) \subset (-\infty, 0)$. По теореме из [32, § 5.4.4] спектр оператора $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p. Таким образом, если выполнены условия леммы 5.1, то

(1) задача (5.1)–(5.3) имеет пространственно-однородное стационарное решение тогда и только тогда, когда $K = 2\pi m\Big(1 + \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i\Big)^{-1}$, $m \in \mathbb{Z}$;

(2) спектр линеаризованного оператора $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ вещественный и дискретный.

Ниже будет показано, что в этом случае задача (5.1)–(5.3) не имеет бифуркационного семейства периодических решений в окрестности пространственно-однородного стационарного решения.

Поскольку условие 5.3 выполнено при почти всех $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{R}^n$, то будем предполагать, что выполнено следующее условие, являющееся необходимым для существования бифуркационного семейства периодических решений.

Условие 5.4. $g_i(Q) \subseteq Q, \;\; i = 1, \ldots, N.$

Тогда пространственно-однородное стационарное решение задачи (5.1)–(5.3) удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$w = K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w\Big). \tag{5.12}$$

Условие 5.5. $1 + \widehat{K} \sin \widehat{w} \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \neq 0$, *где* $\widehat{w}$ — *решение уравнения* (5.12) *для* $K = \widehat{K}$.

Из теоремы о неявной функции вытекает следующее утверждение (см. лемму 2 в [19]).

Лемма 5.2. *Пусть выполнено условие* 5.5. *Тогда для некоторого* $\varkappa_0 > 0$ *существует аналитическая функция* $w = w(\varkappa)$, $\varkappa \in (-\varkappa_0, \varkappa_0)$, *удовлетворяющая уравнению* (5.12) *при* $K = \widehat{K} + \varkappa$, *причем* $w(0) = \widehat{w}$.

В дальнейшем будем предполагать, что условия 5.4, 5.5 выполняются. Положим $K = \widehat{K} + \varkappa$. Тогда по лемме 5.2 в некоторой окрестности точки $\varkappa = 0$ существует аналитическая функция $w = w(\varkappa)$, удовлетворяющая уравнению (5.12) для $K = \widehat{K} + \varkappa$, такая, что $w(0) = \widehat{w}$. Запишем решение $u(x,t) = u(x,t,\varkappa)$ задачи (5.1), (5.2) в виде $u(x,t,\varkappa) = w(\varkappa) + v(x,t,\varkappa)$.

Уравнение (5.9) примет вид

$$v_t = f(v, \varkappa), \tag{5.13}$$

где $f(v,\varkappa) = D\Delta v - v + (\widehat{K} + \varkappa)\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i\Big(\cos(w(\varkappa) + v_{g_i}) - \cos w(\varkappa)\Big)$.

Очевидно, $f_v(0,\varkappa)v = D\Delta v - v - (\widehat{K} + \varkappa)\sin w(\varkappa)\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i}$.

Введем оператор $\Lambda(\varkappa) : \mathcal{D}(\Lambda(\varkappa)) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda(\varkappa)) = \{v \in W_p^2(Q) : (\partial v/\partial\nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\Lambda(\varkappa) = f_v(0,\varkappa)$.

Уравнение (5.13) примет вид

$$v_t = \Lambda(\varkappa)v + \mathcal{N}(v, \varkappa), \tag{5.14}$$

где

$$\Lambda(\varkappa)v = D\Delta v - v - (\widehat{K} + \varkappa)\sin w(\varkappa)\sum_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i},$$

$$\mathcal{N}(v,\varkappa) = (K + \varkappa)\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\Big(\cos(w(\varkappa) + v_{g_i}) - \cos w(\varkappa) + v_{g_i}\sin w(\varkappa)\Big).$$

Обозначим $\Lambda_0 = \Lambda(0)$. Ясно, что

$$\Lambda_0 v = D\Delta v - v - \widehat{K}\sin\widehat{w}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i}.$$

5.3. Спектральные свойства линеаризованного оператора

Рассмотрим теперь линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $\Lambda(\varkappa)$. В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующее условие.

Условие 5.6. $\widehat{w} \neq \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

В противном случае оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный и, следовательно, его спектр вещественный.

Введем линейный неограниченный оператор $\mathcal{A}_0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{v \in W_p^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\mathcal{A}_0 v = D\Delta v$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Определим также ограниченный оператор $\mathcal{A}_g : L_p(Q) \to L_p(Q)$ по формуле

$$(\mathcal{A}_g v)(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i v(g_i(x)), \tag{5.15}$$

где $a_i = -\widehat{K}\gamma_i \sin\widehat{w}$. Очевидно, что $\Lambda_0 = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_g - I$.

Обозначим через $\mathcal{B}(L_p(Q))$ пространство линейных ограниченных операторов в $L_p(Q)$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма оператора из $\mathcal{B}(L_p(Q))$.

Следующая лемма была доказана в работе [28] при $N = 1$, т. е. для $(\mathcal{A}_g v)(x) = av(g(x))$.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия* 5.2, 5.4, 5.5 *и* 5.6. *Тогда для любого* $\pi/2 < \theta < \pi$ *существует* $\xi \in \mathbb{R}$ *такое, что спектр* $\sigma(\Lambda_0) \subset \mathbb{C} \setminus S_{\theta\xi}$ *и*

$$\|(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant M|\lambda - \xi|^{-1} \qquad (\xi \neq \lambda,\ \lambda \in S_{\theta\xi}), \tag{5.16}$$

где $S_{\theta\xi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \xi)| \leqslant \theta\}$, *а число* $M > 0$ *не зависит от* λ.

Более того, резольвента $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ — *компактный оператор при* $\lambda \notin \sigma(\Lambda_0)$. *Следовательно, спектр* $\sigma(\Lambda_0)$ *дискретный.*

Доказательство. По теореме о лучах минимального роста [36, теорема 2.1] для любого $\pi/2 < \theta < \pi$ существует $q > 0$ такое, что $\sigma(\mathcal{A}_0 - I) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_{\theta q}$ и

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant M_1|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \Omega_{\theta q}, \tag{5.17}$$

где $M_1 > 0$ не зависит от λ, $\Omega_{\theta q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \theta,\ |\lambda| \geqslant q\}$.

Рассмотрим оператор $\Lambda_0 - \lambda I : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$, где $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_0 - I)$. Очевидно,

$$\Lambda_0 - \lambda I = (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g).$$

В силу (5.17) имеем

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_p \leqslant M_1\|\mathcal{A}_g\|_p \cdot |\lambda|^{-1}.$$

При $|\lambda| > 2M_1\|\mathcal{A}_g\|_p$ получим $\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_p \leqslant 1/2$. Отсюда

$$\|I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_p \geqslant 1/2,$$

поэтому

$$\|(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g)^{-1}\|_p \leqslant 2.$$

Значит, оператор $\Lambda_0 - \lambda I$ имеет ограниченный обратный $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ для $\lambda \in \Omega_{\theta q_0}$, где $q_0 = \max\{2M_1\|\mathcal{A}_g\|_p, q\}$. Более того,

$$\|(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant 2M_1|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \Omega_{\theta q_0}. \tag{5.18}$$

Обозначим $\xi = q_0/\sin\theta$. Очевидно, $S_{\theta\xi} \subset \Omega_{\theta q_0}$ и $|\lambda - \xi| \leqslant |\lambda| + |\xi| \leqslant |\lambda| + |\lambda|/\sin\theta$ для $\lambda \in S_{\theta\xi}$. Поэтому из (5.18) следует (5.16) для $M = 2M_1(1 + 1/\sin\theta)$.

Компактность резольвенты $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ для $\lambda \notin \sigma(\Lambda_0)$ следует из теоремы Банаха об обратном операторе и компактности вложения $W_p^2(Q)$ в $L_p(Q)$. Дискретность спектра вытекает из теоремы об операторе с компактной резольвентой (теорема 1.20). $\square$

Лемма 5.4^0. *Пусть выполнены условия* 5.2, 5.4, 5.5 *и* 5.6. *Тогда оператор* $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *имеет дискретный спектр, удовлетворяющий условию* $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1. Действительно, оператор $\mathcal{A}_0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный. Поэтому, как известно [12, гл. V, § 3], спектр $\sigma(\mathcal{A}_0 - I)$ вещественный и

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\|_2 \leqslant |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{5.19}$$

Так как оператор $\mathcal{A}_g$ ограничен, получим

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_2 \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{5.20}$$

Очевидно, для $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_0 - I)$ можно записать

$$\Lambda_0 - \lambda I = (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g). \tag{5.21}$$

При $|\operatorname{Im}\lambda| > \|\mathcal{A}_g\|_2$ из (5.20) получим $\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_2 \leqslant c_1$, где $c_1 < 1$. Отсюда вытекает оценка $\|I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_2 \geqslant c_2 > 0$, следовательно, существует ограниченный оператор $(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g)^{-1}$. Поэтому из (5.19), (5.21) следует, что $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$. Более того, по лемме 5.3 спектр $\sigma(\Lambda_0)$ дискретный.

Интегрируя по частям, для $u \in \mathcal{D}(\Lambda_0)$ мы имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\Lambda_0 u, u)_{L_2(Q)} = -D\int\limits_Q |\nabla u|^2\,dx - \int\limits_Q |u|^2\,dx + \operatorname{Re}\int\limits_Q \mathcal{A}_g u\,\overline{u}\,dx \leqslant \\ \leqslant (\|\mathcal{A}_g\|_2 - 1)\|u\|^2_{L_2(Q)}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1\}$. □

Лемма 5.4. *Пусть выполнены условия* 5.2, 5.4, 5.5 *и* 5.6. *Предположим, что* $g_i \in C^\infty(\overline{Q})$ *и* $J_{g_i}(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}$, *где* $J_{g_i}(x)$ — *якобиан преобразования* $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$.

Тогда спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ *для любого* $p > 1$ *удовлетворяет условию* $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$.

Доказательство. 1. Следуя доказательству аналогичной леммы 3.2 в [28], вначале докажем, что спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p. Пусть $u_s(x)$ — собственная функция оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$, соответствующая собственному значению λ_s. Тогда $u_s \in W_p^2(Q)$ является решением краевой задачи

$$\Delta u_s(x) - u_s(x) - \lambda_s u_s(x) = -\sum_{i=1}^{N} a_i u_s(g_i(x)), \quad x \in Q, \tag{5.22}$$

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{\partial Q} = 0. \tag{5.23}$$

По условию преобразования $g_i(x)$ невырожденные и $g_i \in C^\infty(\overline{Q})$, $i = 1, \ldots, N$. Поэтому правая часть уравнения (5.22) принадлежит $W_p^2(Q)$. Следовательно, по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических задач [32, § 5.4.1] имеем $u_s \in W_p^4(Q)$. Используя эти рассуждения k раз, мы получим $u_s \in W_p^{2+2k}(Q)$. В силу произвольности k из теоремы вложения имеем $u_s \in C^\infty(\overline{Q})$. Поэтому u_s является собственной функцией оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_{p_1}(Q) \to L_{p_1}(Q)$, соответствующей собственному значению λ_s, для любого $p_1 > 1$. Таким образом, спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p.

2. Поскольку спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p, рассмотрим оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$. По лемме 5.4^0 имеем $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1,\ |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$. □

Лемма 5.5. *Пусть выполнены условия* 5.1, 5.2, 5.4, 5.5 *и* 5.6. *Предположим, что преобразования* $g_i \in C^1(\overline{Q})$ *таковы, что* $g_i^2(x) \equiv x$ *и* $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$, $i = 1, \ldots, N$. *Тогда оператор* $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *самосопряженный.*

Доказательство. Из условия $g_i^2(x) \equiv x$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, и условия 5.5 следует $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. Действительно, так как преобразование g_i взаимно однозначно, из $g_i^2(x) \equiv x$ получим $g_i^{-1}(x) = g_i(x)$, $x \in Q$. Согласно условию 5.4, $g_i(Q) \subseteq Q$. Следовательно, любая точка $x \in Q$ имеет прообраз $g_i^{-1}(x) = g_i(x) \in Q$. Таким образом, $g_i(Q) = Q$.

Поскольку $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $g_i^2(x) \equiv x$ и $g_i(Q) = Q$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, с помощью замены переменных $y^i = g_i(x)$ получим

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_g u, v)_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q a_i u(g_i(x)) \overline{v(x)}\, dx = \\
= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q u(y^i) a_i \overline{v(g_i^{-1}(y^i))} |J_{g_i^{-1}}(y^i)|\, dy^i = \\
= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q u(y^i) a_i \overline{u(g_i(y^i))}\, dy^i = (u, \mathcal{A}_g v)_{L_2(Q)}
\end{aligned}
$$

для всех $u, v \in L_2(Q)$.

Таким образом, ограниченный оператор $\mathcal{A}_g : L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный. Поскольку $\Lambda_0 = \mathcal{A}_0 - I + \mathcal{A}_g$, то оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный. $\square$

5.4. Бифуркация периодических решений

В этом пункте, следуя [54] и используя результаты из §§ 5.1–5.3, получим теорему о бифуркации периодических решений задачи (5.1), (5.2). Будем предполагать, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda_0) = \{u \in W_2^2(Q) : (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$, заданный по формуле

$$
\Lambda_0 v = D\Delta v - v - \widehat{K} \sin \widehat{w} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i},
$$

является нормальным. Это позволит использовать базисность в $L_2(Q)$ собственных функций оператора Λ_0. Кроме того, такое предположение естественным образом выполняется для наиболее часто используемых на практике физических постановок задач (см. [11, 19, 50, 56]).

Поскольку нормальность оператора Λ_0 эквивалентна нормальности оператора $\Lambda_0 + I$, применим теорему 2.3 из § 2.2 совместно с условиями 3.1 и 3.2 из § 3.1 и получим следующие результаты.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.2. *Тогда оператор* Λ_0 — *нормальный.*

Исследование бифуркации периодических решений задачи (5.1), (5.2) проводится по той же схеме, что и в случае одного преобразования пространственных переменных (см. [54]). Для полноты изложения приведем его целиком.

В силу теоремы 2.2 из § 2.2 будем считать, что $M > 0$, иначе оператор Λ_0 окажется самосопряженным.

Пусть $\Omega_T = Q \times (0, T)$. Обозначим через $W_2^{2,1}(\Omega_T)$ пространство функций из $L_2(\Omega_T)$ таких, что все их обобщенные производные вплоть до второго порядка по x и первая обобщенная производная по t принадлежат пространству $L_2(\Omega_T)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} = \left\{ \int\limits_{\Omega_T} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant 2} |D_x^\alpha u|^2 + |D_t u|^2 \right) dxdt \right\}^{1/2}.$$

Из леммы 2.3 в [54] вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.6. *Пусть выполнены условия* 5.2 *и* 5.4, *и пусть* $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — *вещественнозначная функция такая, что* $|\Phi^{(m)}(y)| \leqslant C$ *при* $y \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, *где* $C > 0$ *не зависит от* y, m. *Тогда отображения*

$v \mapsto \Phi(v_{g_i})$ $(i = 1, \dots, N)$ из $W_2^{2,1}(\Omega_T)$ в $L_2(\Omega_T)$ являются аналитическими в каждой точке пространства $W_2^{2,1}(\Omega_T)$.

Из лемм 5.2, 5.6 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.7. *Пусть выполнены условия* 5.2, 5.4, 5.5. *Тогда отображения $(v, \varkappa) \mapsto \Lambda(\varkappa)v$, $(v, \varkappa) \mapsto \mathcal{N}(v, \varkappa)$ из $W_2^{2,1}(\Omega_T) \times (-\varkappa_0, \varkappa_0)$ в $L_2(\Omega_T)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки* $(0, 0)$.

В силу леммы 5.7 представим оператор $\Lambda(\varkappa)v$ в виде

$$\Lambda(\varkappa)v = \Lambda_0 v + \varkappa\Lambda_1 v + \varkappa^2\Lambda_2(\varkappa)v,$$

где

$$\Lambda_1 v = \sum_{i=1}^{N} l_i v_{g_i},$$

$$l_i = -\gamma_i \left[\sin\widehat{w} + \widehat{K}\cos\widehat{w} \left(1 + \cos\widehat{w}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\right)\left(1 + \widehat{K}\sin\widehat{w}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\right)^{-1} \right],$$

$$\|\Lambda_2(\varkappa)v\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c\|v\|_{L_2(\Omega_T)}.$$

Из теоремы 5.1 и лемм 3.2, 5.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.2. *Тогда в $L_2(Q)$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора Λ_0.*

Из леммы 5.3 следует, что оператор $\Lambda(\varkappa)$ имеет компактную резольвенту. Следовательно, спектр $\sigma(\Lambda(\varkappa))$ дискретный. Обозначим через $\lambda_s(\varkappa) = \delta_s(\varkappa) + i\omega_s(\varkappa)$, $s = 1, 2, \dots$, собственные значения оператора $\Lambda(\varkappa)$. Из леммы 4.13 следует, что $\delta_s(\varkappa)$ и $\omega_s(\varkappa)$ бесконечно дифференцируемы при достаточно малых $\varkappa$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 5.7. *При $\varkappa = 0$ существуют в точности два простых чисто мнимых комплексно сопряженных собственных значения $\lambda_1(0) = i\widehat{\omega}$, $\lambda_2(0) = -i\widehat{\omega}$ оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$, так что $\delta_1(0) = \delta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = -\omega_2(0) = \widehat{\omega}$. При этом выполнено $\widehat{\omega} > 0$ и*

$$\delta_1'(0) = \left.\frac{\partial \delta_1(\varkappa)}{\partial \varkappa}\right|_{\varkappa=0} \neq 0.$$

Замечание 5.2. Условие 5.6 следует из условия 5.7. Действительно, при нарушении условия 5.6 оператор Λ_0 становится самосопряженным, а его спектр — вещественным, откуда следует нарушение условия 5.7. Кроме того, если условие 5.7 выполнено, то преобразования $g_1, \ldots, g_N$ не удовлетворяют условиям леммы 5.5. $\square$

Обозначим через $u_1(x) = p(x) + iq(x)$ собственную функцию оператора Λ_0, соответствующую собственному значению $\lambda_1(0)$. Будем считать, что $\|u_1\|_{L_2(Q)} = 1$. Через M_1 обозначим собственное подпространство оператора Λ_0, соответствующее собственному значению $\lambda_1(0)$. Пусть P_1 — оператор ортогональной проекции на M_1 в пространстве $L_2(Q)$.

Лемма 5.8. *Пусть выполнены условия* 5.5, 3.1, 3.2, 5.7. *Тогда*

$$\delta_1'(0) = \sum_{i=1}^{N} l_i \int\limits_Q (p(g_i(x))p(x) + q(g_i(x))q(x))\,dx \neq 0.$$

Доказательство. В силу условий 5.5, 3.1, 3.2, 5.7, компактности резольвенты $R(\lambda, \Lambda_0) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ и ограниченности операторов Λ_1, Λ_2 в $L_2(Q)$ получим, что выполнены условия теоремы 2.6 в [12, гл. VIII, § 2]. По этой теореме и теореме 5.2 мы имеем

$$\lambda_1(\varkappa) = \lambda_1(0) + \varkappa\mu_1 + o(\varkappa),$$

где μ_1 — собственное значение оператора $P_1\Lambda_1$, действующего в одномерном подпространстве M_1. Тогда, учитывая, что $\|u_1\|_{L_2(Q)} = 1$, получим

$$\left.\frac{d\delta_1(\varkappa)}{d\varkappa}\right|_{\varkappa=0} = \operatorname{Re}\mu_1 = \operatorname{Re}(\Lambda_1 u_1, u_1)_{L_2(Q)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} l_i \int\limits_Q (p(g_i(x))p(x) + q(g_i(x))q(x))\,dx.$$

□

Введем новую переменную времени $\tau = \omega\widehat{\omega}t$, где $\omega = \omega(\varkappa)$ — неизвестная частота. Тогда уравнение (5.14) примет вид

$$\omega(\varkappa)v_\tau = \widehat{\Lambda}(\varkappa)v + \widehat{\mathcal{N}}(v,\varkappa), \tag{5.24}$$

где $\widehat{\Lambda}(\varkappa) = \widehat{\Lambda}_0 + \varkappa\widehat{\Lambda}_1 + \varkappa^2\widehat{\Lambda}_2(\varkappa)$, $\widehat{\Lambda}_k = \widehat{\omega}^{-1}\Lambda_k$ $(k = 0,1,2)$, $\widehat{\mathcal{N}}(v,\varkappa) = \widehat{\omega}^{-1}\mathcal{N}(v,\varkappa)$. Очевидно, что в силу условия 5.7 оператор $\widehat{\Lambda}(0)$ имеет пару комплексно сопряженных собственных значений $\pm i$.

Чтобы изучать 2π-периодические решения уравнения (5.24) с условием Неймана на границе $\Gamma_{2\pi} = \partial Q \times (0,2\pi)$, введем подпространство

$$W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) = \left\{ u \in W^{2,1}_2(\Omega_{2\pi}) : \left.\frac{\partial u}{\partial\widetilde{\nu}}\right|_{\Gamma_{2\pi}} = 0,\ u\big|_{t=0} = u\big|_{t=2\pi} \right\}.$$

Периодическое решение уравнения (5.24) задается вектор-функцией $(v,\omega,\varkappa) \in W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \subset L_2(\Omega_{2\pi}) \to L_2(\Omega_{2\pi})$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$, действующий по формуле

$$\mathcal{T}v = v_\tau - \widehat{\Lambda}_0 v.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{T} : W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \to L_2(\Omega_{2\pi})$ ограничен. Обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ соответственно ядро и образ оператора $\mathcal{T}$. Зададим формально сопряженный оператор $\mathcal{T}^* : \mathcal{D}(\mathcal{T}^*) \subset L_2(\Omega_{2\pi}) \to L_2(\Omega_{2\pi})$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*) = W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$ по формуле

$$\mathcal{T}^* v = -v_\tau - \widehat{\Lambda}_0^* v, \quad \widehat{\Lambda}_0^* v = \widehat{\omega}^{-1} \left(D\Delta v(x) - v(x) - \widehat{K} \sin\widehat{\omega} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i v(g_i^{-1}(x)) \right).$$

Лемма 5.9. *Пусть выполнены условия* 5.5, 3.1, 3.2, 5.7. *Тогда* $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)$, $\dim \mathcal{N}(\mathcal{T}) = 2$ *и* $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$. *Кроме того, функции*

$$\psi_1(x,\tau) = \frac{p(x)\cos\tau - q(x)\sin\tau}{\sqrt{\pi}}, \qquad \psi_2(x,\tau) = \frac{p(x)\sin\tau + q(x)\cos\tau}{\sqrt{\pi}}$$

образуют ортонормированный базис в $\mathcal{N}(\mathcal{T})$.

Доказательство.

1. В силу леммы 5.3 спектр $\sigma(\widehat{\Lambda}_0)$ дискретный. Поэтому существует эквивалентное скалярное произведение

$$(u,v)'_{W^2_{2,N}(Q)} = \int\limits_Q \widehat{\Lambda}_0 u \cdot \overline{\widehat{\Lambda}_0 v}\, dx + \int\limits_Q u\overline{v}\, dx \tag{5.25}$$

в подпространстве

$$W^2_{2,N}(Q) = \left\{ u \in W^2_2(Q) : \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

По теореме 5.2 собственные функции u_s ($s = 1, 2, \ldots$) оператора $\widehat{\Lambda}_0$, соответствующие собственным значениям $\widehat{\lambda}_s = \lambda_s \widehat{\omega}^{-1}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$. Тогда функции $u_s \big/ \sqrt{|\widehat{\lambda}_s|^2 + 1}$ образуют ортонормированный базис в $W^2_{2,N}(Q)$ с эквивалентным скалярным произведением (5.25). Поэтому функции $\exp(ikt) u_s(x) \big/ \sqrt{2\pi}$ ($s = 1, 2, \ldots$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega_{2\pi})$, а функции $\exp(ik\tau) u_s(x) \big/ \sqrt{2\pi(|\widehat{\lambda}_s|^2 + k^2 + 1)}$ образуют ортонормированный базис в $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$ с эквивалентным скалярным произведением, заданным формулой

$$(u,v)'_{W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})} = \int\limits_0^{2\pi} \left((u,v)'_{W^2_{2,N}(Q_\tau)} + (u_\tau, v_\tau)_{L_2(Q_\tau)} \right) d\tau, \tag{5.26}$$

где $Q_\tau = Q \times \{\tau\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{T} v = 0. \tag{5.27}$$

Разложение v в ряд Фурье по системе функций $\left\{\exp(ikt)u_s(x)/\sqrt{2\pi}\right\}$ имеет вид

$$v(x,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} v_{ks} \exp(ik\tau) u_s(x)/\sqrt{2\pi}. \tag{5.28}$$

Из уравнений (5.27), (5.28) получим

$$v_{ks}(ik - \widehat{\lambda}_s) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

По условию 5.7 имеем

$$v_{ks} = 0 \quad \text{при} \quad (k,s) \notin \{(1,1)\} \cup \{(-1,2)\}.$$

С другой стороны, поскольку коэффициенты оператора $\widehat{\Lambda}_0$ вещественны, имеет место $u_2(x) = \overline{u_1(x)}$. Отсюда

$$v(x,\tau) = v_{11} \exp(i\tau) u_1(x)/\sqrt{2\pi} + v_{-1,2} \exp(-i\tau)\overline{u_1(x)}/\sqrt{2\pi}. \tag{5.29}$$

Таким образом, произвольный элемент из $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ имеет вид (5.29), поэтому $\dim \mathcal{N}(\mathcal{T}) = 2$. В силу леммы 3.2 и теоремы о собственных функциях и собственных значениях ограниченных нормальных операторов (теорема 1.7), функции $u_1(x)$ и $\overline{u_1(x)}$ являются собственными функциями оператора $\widehat{\Lambda}_0^*$, отвечающими собственным значениям $-i$ и i соответственно. Следовательно, $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)$.

Очевидно, что

$$\psi_1(x,\tau) = \mathrm{Re}\{\exp(i\tau)u_1(x)/\sqrt{\pi}\}, \qquad \psi_2(x,\tau) = \mathrm{Im}\{\exp(i\tau)u_1(x)/\sqrt{\pi}\},$$

поэтому $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$. Поскольку $\|u_1\|_{L_2(Q)} = 1$ и функции $u_1(x)$, $u_2(x) = \overline{u_1(x)}$ ортогональны в $L_2(Q)$, получим

$$\int\limits_Q (p^2(x) + q^2(x))\, dx = 1, \tag{5.30}$$

$$\int\limits_Q (p^2(x) - q^2(x))\, dx = 0, \tag{5.31}$$

$$\int\limits_Q p(x)q(x)\, dx = 0. \tag{5.32}$$

Из равенств (5.30)–(5.32) получим

$$\|\psi_1\|_{L_2(\Omega_{2\pi})} = \|\psi_2\|_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 1, \qquad (\psi_1, \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 0.$$

Таким образом, функции ψ_1, ψ_2 образуют ортонормированный базис в $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)$.

2. Очевидно, что $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)^\perp$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим уравнение

$$\mathcal{T} v = f. \tag{5.33}$$

Покажем, что уравнение (5.33) имеет решение при любом $f \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$. Разложение функции f в ряд Фурье имеет вид

$$f(x, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} f_{ks} \exp(ik\tau) u_s(x)/\sqrt{2\pi},$$

где $f_{11} = f_{-1,2} = 0$.

Рассмотрим функцию $v(x, \tau)$, заданную рядом Фурье

$$v(x, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} v_{ks} \exp(ik\tau) u_s(x)/\sqrt{2\pi}, \tag{5.34}$$

где

$$v_{ks} = \begin{cases} f_{ks}(ik - \widehat{\lambda}_s)^{-1} & \text{при} \quad (k, s) \notin \{(1,1)\} \cup \{(-1,2)\}, \\ 0 & \text{при} \quad (k, s) \in \{(1,1)\} \cup \{(-1,2)\}. \end{cases}$$

В силу леммы 5.4^0 существует $M > 0$ такое, что для всех $|k|, s > M$

$$\sqrt{k^2 + |\widehat{\lambda}_s|^2 + 1} \leqslant c_1 |ik - \widehat{\lambda}_s|, \tag{5.35}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от k, s. Из оценки (5.35) следует, что ряд (5.34) сходится в пространстве $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$ с эквивалентным скалярным произведением (5.26). Очевидно, что функция $v(x,\tau)$ является решением (5.33).

$\square$

Получим теорему о бифуркации периодических решений задачи (5.1), (5.2) в окрестности пространственно-однородного стационарного решения $\widehat{w}$.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* 5.5, 3.1, 3.2, 5.7.

Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ существует непрерывная вектор-функция $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ из $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Эта функция аналитическая на интервале $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и удовлетворяет условиям

$$v(0) = 0, \quad \omega(0) = 1, \quad \varkappa(0) = 0.$$

Функция $u(x,t,\varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x,\tau,\varepsilon)$ является $2\pi(\widehat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$-периодическим по t решением задачи (5.1), (5.2), *где $\tau = \omega(\varepsilon)\widehat{\omega}t$.*

Доказательство. Введем обозначение $\mathcal{R} = P(W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}))$, где P — оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ в пространстве $L_2(\Omega_{2\pi})$. Положим $v(x,\tau,\varepsilon) = \varepsilon z(\varepsilon)$, где $z(\varepsilon) = \eta + \xi(\varepsilon)$, $\eta \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$, $\|\eta\|_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 1$, $\xi(\varepsilon) = \xi(x,\tau,\varepsilon) \in \mathcal{R}$, $\xi(0) = 0$. Тогда уравнение (5.24) можно записать в виде

$$\mathcal{T}\xi + (\omega - 1)(\eta_\tau + \xi_\tau) - (\varkappa\widehat{\Lambda}_1 z + \varkappa^2\widehat{\Lambda}_2 z) - \varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z, \varkappa) = 0. \qquad (5.36)$$

Разложение η по системе функций $\{\psi_i\}$ имеет вид $\eta = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, где $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Очевидно, что $\eta_\tau = -c_1\psi_2 + c_2\psi_1$, таким образом, $\eta_\tau \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$. Применяя операторы ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ и на одномерные подпространства, порожденные функциями

ψ_1, ψ_2, из уравнения (5.36) будем иметь

$$\mathcal{T}\xi + (\omega-1)\xi_\tau - \varkappa P\widehat{\Lambda}_1\eta - \varkappa P\widehat{\Lambda}_1\xi - \varkappa^2 P\widehat{\Lambda}_2 z - \varepsilon^{-1}P\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z, \varkappa) = 0, \quad (5.37)$$

$$(\omega-1)c_2 - \varkappa(\widehat{\Lambda}_1\xi, \psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})} - \varkappa(\widehat{\Lambda}_1\eta, \psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})} - \varkappa^2(\widehat{\Lambda}_2 z, \psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})} - \\ - \varepsilon^{-1}(\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z, \varkappa), \psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 0, \quad (5.38)$$

$$-(\omega-1)c_1 - \varkappa(\widehat{\Lambda}_1\xi, \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} - \varkappa(\widehat{\Lambda}_1\eta, \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} - \varkappa^2(\widehat{\Lambda}_2 z, \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} - \\ - \varepsilon^{-1}(\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z, \varkappa), \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 0. \quad (5.39)$$

Уравнения (5.37)–(5.39) можно записать в виде нелинейного уравнения

$$F(\xi, \omega, \varkappa, \varepsilon) = 0. \quad (5.40)$$

В силу леммы 5.7 отображение $F : \mathcal{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{R}(\mathcal{T}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ является аналитическим в некоторой окрестности точки $(0,1,0,0)$. Нетрудно убедиться, что производная Фреше F' отображения F по переменным $(\xi, \omega, \varkappa)$ в точке $(0,1,0,0)$ имеет вид

$$F' = \begin{pmatrix} \mathcal{T} & 0 & -P\widehat{\Lambda}_1\eta \\ 0 & c_2 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta, \psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})} \\ 0 & -c_1 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta, \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 5.9 следует, что оператор $\mathcal{T} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}(\mathcal{T})$ имеет ограниченный обратный $\mathcal{T}^{-1}$. Следовательно, оператор F' имеет ограниченный обратный $(F')^{-1}$ тогда и только тогда, когда

$$d = \begin{vmatrix} c_2 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta, \psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})} \\ -c_1 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta, \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$d = -\widehat{\omega}^{-1}\sum_{i=1}^{N} l_i \int\limits_Q (p(g_i(x))p(x) + q(g_i(x))q(x))\,dx.$$

Из леммы 5.8 и условия 5.7 получим, что $d = -\widehat{\omega}^{-1}\delta_1'(0) \neq 0$. Следовательно, по теореме о неявном операторе [31, теорема 36.5, гл. IX, § 36] существует вектор-функция $\varepsilon \mapsto (\xi(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ из $\mathbb{R}$ в $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, непрерывная на $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ и аналитическая на $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ для достаточно малых $\varepsilon_0 > 0$. Кроме того, $\xi(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$. □

5.5. Бифуркация Андронова—Хопфа

В этом пункте, следуя [28] и используя результаты из §§ 5.1–5.3, получим теорему о бифуркации Андронова—Хопфа периодических решений задачи (5.1), (5.2). В отличие от подхода, примененного в § 5.4, в настоящем пункте не предполагается, что линеаризованный функционально-дифференциальный оператор Λ_0 является нормальным. Это расширяет класс допустимых преобразований пространственных переменных $g_1, \dots, g_N$.

Обозначим через $C^{\sigma}_{2\pi}(X)$ пространство всех σ-непрерывных по Гельдеру 2π-периодических функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 2\pi} \frac{\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_X}{(t-s)^{\sigma}},$$

где X — вещественное банахово пространство, $0 < \sigma < 1$.

Пусть $C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)$ — пространство дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ таких, что φ и φ' принадлежат $C^{\sigma}_{2\pi}(X)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \|\varphi'\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(X)}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_p(Q)$ пространство Лебега вещественнозначных функций, абсолютно интегрируемых в области Q с показателем p, а через $\mathcal{W}^k_p(Q)$ — пространство Соболева вещественнозначных функций, принадлежащих $\mathcal{L}_p(Q)$ вместе со своими обобщенными производными вплоть до порядка k.

Из леммы 2.3 в [28] вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.10. *Пусть выполнены условия* 5.2 *и* 5.4, *и пусть* $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — *вещественнозначная функция такая, что* $|\Phi^{(m)}(y)| \leqslant M$ *при* $y \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, *где* $M > 0$ *не зависит от* y, m.

Тогда отображения $v \mapsto \Phi(v_{g_i})$ $(i = 1, \ldots, N)$ *из* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_p(Q))$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ *являются аналитическими в каждой точке пространства* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_p(Q))$, *где* $p > n/2$.

Из лемм 5.2, 5.10 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.11. *Пусть выполнены условия* 5.2, 5.4, 5.5.

Тогда отображение $(v, \varkappa) \mapsto f(v, \varkappa)$ *из* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_p(Q)) \times (-\varkappa_0, \varkappa_0)$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ *является аналитическим в некоторой окрестности точки* $(0, 0)$.

Чтобы изучать решения уравнения (5.13) с неизвестным периодом, положим $\tau = \widehat{\omega}\omega(\varkappa)t$, где $\omega(\varkappa)$ — неизвестная частота, близкая к 1.

Рассмотрим теперь 2π-периодические решения уравнения

$$v_\tau = (\widehat{\omega}\omega(\varkappa))^{-1} f(v(\tau), \varkappa), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $\mathcal{W}^2_{p,N}(Q) = \{v \in \mathcal{W}^2_p(Q) : (\partial v/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$.

Теорема 5.4. *Пусть выполняются условия* 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.7. *Зафиксируем* $\sigma \in (0, 1)$ *и* $p > n/2$. *Тогда*:

1. *Существуют некоторое* $\varepsilon_0 > 0$ *и аналитическая вектор-функция* $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ *из* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *такая, что* $v(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$ *и* $v(\varepsilon)$ *не постоянна по* τ *при* $\varepsilon \neq 0$.

2. *Функция* $u(x, t, \varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x, \tau, \varepsilon)$ *является* $2\pi(\widehat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$*-периодическим по* t *решением задачи* (5.1), (5.2), *где* $\tau = \omega(\varepsilon)\widehat{\omega}t$. *При этом* $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \ldots$, $\varkappa(\varepsilon) = \varepsilon^2\varkappa_2 + \varepsilon^3\varkappa_3 + \ldots$.

3. *Более того, существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что если* $\overline{\varkappa}, \overline{\omega} \in \mathbb{R}$ *и* $\overline{v} \in C^{\sigma}_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ *удовлетворяют условиям*

$$\overline{v}_\tau = (\widehat{\omega}\overline{\omega})^{-1} f(\overline{v}, \overline{\varkappa}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\|\overline{v}\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))} < \delta_0, \quad |\overline{\varkappa}| < \delta_0, \quad |1 - \overline{\omega}| < \delta_0,$$

то существуют $\theta \in [0, 2\pi)$ *и* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *такие, что* $\overline{\varkappa} = \varkappa(\varepsilon)$, $\overline{\omega} = \omega(\varepsilon)$, $\overline{v}(x, \tau) = v(x, \tau + \theta, \varepsilon)$.

Теорема 5.4 доказывается методом, развитым в работах [28, 39]. Для полноты изложения приведем это доказательство целиком.

Доказательство.

1. Начнем с вспомогательных результатов. Обозначим через $\widehat{L}$ сужение оператора $\widehat{\Lambda}$ на пространства вещественнозначных функций.

В силу лемм 5.3, 5.11 и леммы 4.13 существует $\varkappa_1 \in (0, \varkappa_0)$ и функции $\alpha, \beta \in C^\infty((-\varkappa_1, \varkappa_1); \mathbb{R})$, $r, s \in C^\infty((-\varkappa_1, \varkappa_1), \mathcal{D}(\widehat{L}_0))$ такие, что

$$\widehat{\Lambda}(\varkappa)(r(\varkappa) + is(\varkappa)) = (\alpha(\varkappa) + i\beta(\varkappa))(r(\varkappa) + is(\varkappa)), \tag{5.41}$$

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = 1. \tag{5.42}$$

Положим $e_1 = r(0)$, $e_2 = s(0)$. Тогда

$$\widehat{\Lambda}_0(e_1 \pm ie_2) = \pm i(e_1 \pm ie_2), \tag{5.43}$$

т. е.

$$\widehat{L}_0 e_1 = -e_2, \quad \widehat{L}_0 e_2 = e_1. \tag{5.44}$$

В силу леммы 5.3 и теоремы 5.2 в [49, гл. 2] оператор $\widehat{\Lambda}_0$ является генератором аналитической полугруппы T_τ в $L_p(Q)$. Поэтому из (5.43) и теоремы 8.3 в [49, гл. 1] следует

$$T_\tau(e_1 + ie_2) = e^{i\tau}(e_1 + ie_2).$$

Таким образом,

$$T_\tau e_1 = e_1 \cos\tau - e_2 \sin\tau, \quad T_\tau e_2 = e_1 \sin\tau + e_2 \cos\tau. \tag{5.45}$$

Обозначим через $\mathcal{X}$ подпространство в $\mathcal{L}_p(Q)$, натянутое на векторы e_1 и e_2. Положим $X = \{e + ih : e, h \in \mathcal{X}\}$. Введем оператор

$$P = \sum_{\pm} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi \pm i| = \varepsilon} (\xi I - \widehat{\Lambda}_0)^{-1} d\xi,$$

где ε достаточно мало. Очевидно, что P является оператором проектирования в $L_p(Q)$ на X, причем $P(\mathcal{L}_p(Q)) = \mathcal{X}$ (см. [39]).

Пусть $q = p/(p-1)$. Тогда существуют $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_q(Q)$ такие, что

$$Py = \langle y, \varphi_1 \rangle e_1 + \langle y, \varphi_2 \rangle e_2 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathcal{L}_p(Q), \tag{5.46}$$

$$\langle e_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \tag{5.47}$$

Поскольку операторы $\widehat{L}_0$ и P коммутируют, то из (5.44), (5.45)–(5.47) получаем

$$T_\tau^* \varphi_1 = \varphi_1 \cos\tau + \varphi_2 \sin\tau, \quad T_\tau^* \varphi_2 = -\varphi_1 \sin\tau + \varphi_2 \cos\tau, \tag{5.48}$$

$$\widehat{L}_0^* \varphi_1 = \varphi_2, \quad \widehat{L}_0^* \varphi_2 = -\varphi_1. \tag{5.49}$$

2. Положим $F(v, \omega, \varkappa) = \omega v_\tau - \widehat{\omega}^{-1} f(v, \varkappa)$. В силу леммы 5.11 отображение $F : C_{2\pi}^\sigma(\mathcal{W}_{p,N}^2) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(\mathcal{L}_p(Q)) \times (0,2) \times (-\varkappa_0, \varkappa_0) \to C_{2\pi}^\sigma(\mathcal{L}_p(Q))$ аналитическое в некоторой окрестности точки $(0,1,0)$.

Очевидно, что $F_v(v, \omega, \varkappa)\xi = \omega \xi_\tau - \widehat{\omega}^{-1} f_v(v, \varkappa)\xi$. Следовательно,

$$F_v(0,1,0)\xi = \xi_\tau - \widehat{\Lambda}_0 \xi. \tag{5.50}$$

По теореме 4.9 имеем $\mathcal{N}(F_v(0,1,0)) = \{T_t y : y \in \mathcal{X}\}$,

$$\mathcal{R}(F_v(0,1,0)) = \left\{ z \in C_{2\pi}^\sigma(\mathcal{L}_p(Q)) : P \int\limits_0^{2\pi} T_{2\pi - s} z(s)\, ds = 0 \right\}. \tag{5.51}$$

Поскольку $\dim \mathcal{X} = 2$, а $P(\mathcal{L}_p(Q)) = \mathcal{X}$, имеет место $\dim \mathcal{N}(F_v(0,1,0)) = 2$, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(F_v(0,1,0)) = 2$. Поэтому существует замкнутое подпространство $V \subset C_{2\pi}^\sigma(\mathcal{W}_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(\mathcal{L}_p(Q))$ такое, что $C_{2\pi}^\sigma(\mathcal{W}_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(\mathcal{L}_p(Q)) = \mathcal{N}(F_v(0,1,0)) \oplus V$.

Введем отображение $\Phi : V \times (0,2) \times (-\varkappa_0, \varkappa_0) \times (-1,1) \to C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ по формуле

$$\Phi(\xi,\omega,\varkappa,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{-1}F(\varepsilon(T_\tau e_1+\xi),\omega,\varkappa), & \varepsilon \neq 0, \\ F_v(0,\omega,\varkappa)(T_\tau e_1+\xi), & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что Φ аналитическое в некоторой окрестности точки $(0,1,0,0)$, причем $\Phi(0,1,0,0) = 0$.

Чтобы доказать существование аналитических функций $\xi = \xi(\varepsilon)$, $\omega = \omega(\varepsilon)$, $\varkappa = \varkappa(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ таких, что $\Phi(\xi(\varepsilon),\omega(\varepsilon),\varkappa(\varepsilon),\varepsilon) = 0$ и $\xi(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$, в силу теоремы о неявном операторе [31, теорема 36.5, гл. 9, § 36] достаточно убедиться, что отображение $\Phi' : V \times \mathbb{R}^2 \to C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$, заданное формулой $\Phi'(\widehat{\xi},\widehat{\omega},\widehat{\varkappa}) = \Phi_\xi(0,1,0,0)\widehat{\xi} + \Phi_\omega(0,1,0,0)\widehat{\omega} + \Phi_\varkappa(0,1,0,0)\widehat{\varkappa}$, является изоморфизмом.

Из (5.44) и равенств $L(\varkappa) = \widehat{\omega}^{-1}f_v(0,\varkappa)$ и $T'_\tau e_1 = T_\tau L_0 e_1$ следует, что

$$\Phi'(\widehat{\xi},\widehat{\omega},\widehat{\varkappa}) = F_v(0,1,0)\widehat{\xi} + T'_\tau e_1\widehat{\omega} - L'(0)T_\tau e_1\widehat{\varkappa} = \\ = F_v(0,1,0)\widehat{\xi} - T_\tau e_2\widehat{\omega} - L'(0)T_\tau e_1\widehat{\varkappa}.$$

Докажем, что отображение Φ' инъективно. Полагая $\Phi'(\widehat{\xi},\widehat{\omega},\widehat{\varkappa}) = 0$, в силу (5.45) получим

$$\int_0^{2\pi} T_{2\pi-s}(F_v(0,1,0)\widehat{\xi})(s)ds - 2\pi e_2\widehat{\omega} - \int_0^{2\pi} T_{2\pi-s}L'(0)T_s e_1 ds\widehat{\varkappa} = 0.$$

Применим к левой и правой частям полученного равенства функционал φ_1. Тогда, используя (5.46) и (5.51), будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \langle T_{2\pi-s}L'(0)T_s e_1,\, \varphi_1\rangle\, ds\widehat{\varkappa} = 0. \tag{5.52}$$

Из (5.41), (5.42) следует, что $L'(0)e_1 = -L_0 r'(0) + \alpha'(0)e_1 - \beta'(0)e_2 - s'(0)$, $L'(0)e_2 = -L_0 s'(0) + \beta'(0)e_1 + \alpha'(0)e_2 + r'(0)$. Отсюда и из равенств (5.45), (5.48) и (5.49) получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \langle T_{2\pi-s}L'(0)T_s e_1,\, \varphi_1\rangle\, ds = 2\pi\widehat{\omega}^{-1}\delta_1'(0). \tag{5.53}$$

В силу условия $\delta_1'(0) \neq 0$ и равенства (5.52) имеем $\widehat{\varkappa} = 0$.

Согласно (5.45), (5.47)

$$\int\limits_0^{2\pi} \langle T_{2\pi-s}T_s e_2,\, \varphi_2\rangle ds = 2\pi. \tag{5.54}$$

Поэтому в силу (5.46), (5.51) имеем $T_t e_2 \notin \mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. Таким образом, из равенства $\Phi'(\widehat{\xi},\widehat{\omega},\widehat{\varkappa}) = 0$ следует $\widehat{\xi} = 0$, $\widehat{\omega} = 0$. Итак, отображение Φ' инъективно.

Докажем, что отображение $\Phi' : V \times \mathbb{R}^2 \to C_{2\pi}^{\sigma}(\mathcal{L}_p(Q))$ сюръективно. В силу (5.46), (5.51), (5.53), (5.54) имеем $T_\tau e_2, L'(0)T_\tau e_1 \notin \mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. Поскольку $\operatorname{codim}\mathcal{R}(F_v(0,1,0)) = 2$, достаточно показать, что функции $T_\tau e_2$, $L'(0)T_\tau e_1$ линейно независимы. Действительно, предположим, что $c_1 T_\tau e_2 + L'(0)T_\tau e_1 = 0$. Тогда $c_1 2\pi e_2 + c_2 \int\limits_0^{2\pi} T_{2\pi-s}L'(0)T_s e_1 ds = 0$. Применяя функционал φ_1, в силу (5.47) и (5.53) получаем $2\pi\widehat{\omega}^{-1}\delta_1'(0)c_2 = 0$, т. е. $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$. Поэтому отображение $\Phi' : V \times \mathbb{R}^2 \to C_{2\pi}^{\sigma}(\mathcal{L}_p(Q))$ является изоморфизмом. Таким образом, установлено существование аналитических функций $\xi = \xi(\varepsilon)$, $\omega = \omega(\varepsilon)$ и $\varkappa = \varkappa(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ таких, что $\Phi(\xi(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ и $\xi(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$.

3. Изложим способ вычисления коэффициентов разложения функций $\omega(\varepsilon)$ и $\varkappa(\varepsilon)$ в степенные ряды. Подставляя выражения с неопределенными коэффициентами $\xi = \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots$, $\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$, $\varkappa = \varepsilon\varkappa_1 + \varepsilon^2\varkappa_2 + \ldots$ в функционально-дифференциальное уравнение

$\Phi(\xi,\omega,\varkappa,\varepsilon)=0$, получаем

$$\varepsilon^{-1}\omega(\varepsilon)\varepsilon(T_\tau' e_1+\xi_\tau(\varepsilon))-(\widehat{\omega}\varepsilon)^{-1}f(\varepsilon(T_\tau e_1+\xi(\varepsilon)),\varkappa(\varepsilon))=$$
$$=(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots)(T_\tau' e_1+\varepsilon\xi_{1\tau}+\varepsilon^2\xi_{2\tau}+\ldots)-$$
$$-(\widehat{\omega}\varepsilon)^{-1}\Big\{f(0,0)+f_v(0,0)\varepsilon(T_\tau e_1+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2+\ldots)+$$
$$+f_\varkappa(0,0)\varkappa+\frac{1}{2}f_{vv}(0,0)(T_\tau e_1+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2+\ldots)^2\varepsilon^2+$$
$$+f_{v\varkappa}(0,0)(T_\tau e_1+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2+\ldots)(\varepsilon\varkappa_1+\varepsilon^2\varkappa_2+\ldots)\varepsilon+\frac{1}{2}f_{\varkappa\varkappa}(0,0)\varkappa^2+\ldots\Big\}=0. \tag{5.55}$$

По определению отображения f имеем $f(0,\varkappa)=0$. Поэтому $f(0,0)=0$, $f_\varkappa(0,0)=0$, $f_{\varkappa\varkappa}(0,0)=0$. Таким образом, приравнивая в (5.55) к нулю сумму членов при ε и используя соотношение (5.44), получим уравнение

$$\xi_{1\tau}-\omega_1T_\tau e_2-L_0\xi_1-\frac{1}{2}\,\widehat{\omega}^{-1}f_{vv}(0,0)(T_\tau e_1)^2-\varkappa_1L'(0)T_\tau e_1=0,$$

которое в силу (5.50) примет вид

$$F_v(0,1,0)\xi_1=z,\quad z=\omega_1T_\tau e_2+\varkappa_1L'(0)T_\tau e_1-\frac{1}{2}\,\widehat{K}\cos\widehat{\omega}\sum_{i=1}^N\gamma_i((T_\tau e_1)_{g_i})^2.$$

Из (5.45), (5.48) следует

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\langle T_{2\pi-s}\sum_{i=1}^N\gamma_i((T_se_1)_{g_i})^2,\ \varphi_j\right\rangle ds=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left\langle\sum_{i=1}^N\gamma_i(e_{1g_i}\cos s-e_{2g_i}\sin s)^2,\ T^*_{2\pi-s}\varphi_j\right\rangle ds=$$
$$=\sum_{k,l,m=1}^2\ \sum_{i=1}^N\gamma_i\langle e_{kg_i}e_{lg_i},\ \varphi_m\rangle\int\limits_0^{2\pi}\sum_{q=1}^3\left(a_q^{klm}\cos qs+b_q^{klm}\sin qs\right)ds=0.$$

Поэтому, согласно (5.51), имеем $\widehat{K}\cos\widehat{\omega}\sum\limits_{i=1}^N\gamma_i((T_\tau e_1)_{g_i})^2\in\mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. С другой стороны, в силу второй части доказательства $T_\tau e_2, L'(0)T_\tau e_1\notin$

$\mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. Следовательно, $\omega_1 = \varkappa_1 = 0$. Аналогично, используя равенства, полученные приравниванием коэффициентов при $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$, можно найти $\omega_2, \varkappa_2, \omega_3, \varkappa_3, \ldots$.

Заметим, что $\dim \mathcal{N}(F_v(0,1,0)) = 2$. Поэтому коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \ldots$ определяются неоднозначно.

Из утверждений 1, 2 и теоремы 4.10 вытекает утверждение 3 настоящей теоремы. $\square$

Упражнения

1. Жесткий обруч вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с его диаметром, с угловой скоростью ω. В нижней точке обруча лежит шарик. Доказать, что это положение равновесия устойчиво при $\omega < \omega_0 = \sqrt{g/R}$ (рис. 5.1(а)), а при $\omega > \omega_0$ существуют две устойчивые точки, определяемые уравнением $\cos\theta = g/\omega^2 R$ (рис. 5.1(б)). Здесь g — ускорение силы тяжести, R — радиус обруча, θ — угол, отсчитываемый от оси вращения обруча.

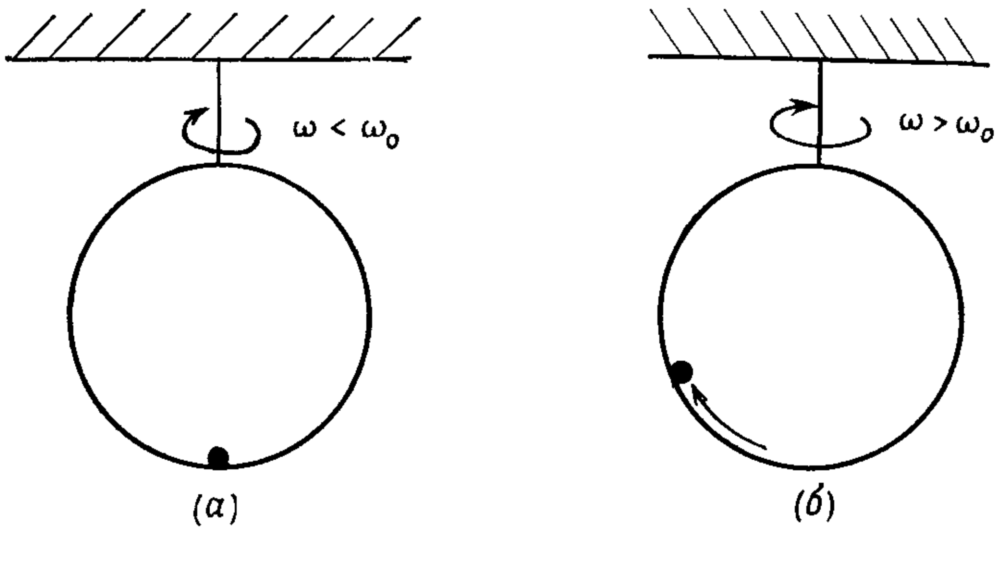

Рис. 5.1

2. Рассмотреть следующее векторное поле на $\mathbb{R}^2$:

$$X(x,y) = (y, \mu(1-x^2)y - x).$$

Определить, является ли начало координат неустойчивой, устойчивой или притягивающей точкой.

3. Дано векторное поле $X(x,y) = (-x, y^2)$. Решить уравнение $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial t} = X(x,y)$ и нарисовать интегральные кривые. Показать, что поток, порожденный X, удовлетворяет условиям теоремы 4.4 с осью y в качестве Y. Показать, что ось y является центральным многообразием для потока. Показать, что каждая интегральная кривая в нижней полуплоскости стремится к началу при $t \to \infty$ и что кривая становится параллельной оси y при $t \to \infty$. Показать, что любая кривая, являющаяся объединением неотрицательной полуоси y с любой интегральной кривой нижней полуплоскости, будет центральным многообразием потока X.

4. Показать, что векторное поле

$$X_\mu(x_1, x_2) = (x_2, \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 4.6.

5. Методом сеток рассчитать численное решение второй смешанной задачи в области $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $(x,y,t) \in Q \times [0,T]$, при $D = 0.1$, $K = 1$, $\gamma = 10$ и $\alpha = \pi/3$:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = D\Delta u(x,y,t) + K(1 + \gamma \cos u(g_1(x,y), g_2(x,y), t)),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial Q \times [0,T]} = 0,$$

$$\left. u \right|_{t=0} = (1 + \cos\sqrt{x^2 + y^2})/(1 + 50x^2),$$

$$g_1(x,y) = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad g_2(x,y) = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Раздел III

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ АРГУМЕНТОВ В СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Тема 6

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА СО СЖАТИЯМИ АРГУМЕНТОВ

6.1. Функциональные операторы

Пусть Q — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, через $W_2^p(Q)$ по-прежнему обозначается пространство Соболева (комплекснозначных) функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе с обобщенными производными до порядка p включительно, и $\mathring{W}_2^p(Q)$ — замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $W_2^p(Q)$. Пространство $W_2^p(Q)$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^p(Q)} = \sum_{|\alpha|\leqslant p} \int\limits_Q D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = (-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}.$$

Известно, что в $\mathring{W}_2^p(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u,v)'_{\mathring{W}_2^p(Q)} = \sum_{|\alpha|\leqslant p} \int\limits_Q D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx.$$

Пространство $\mathring{W}_2^p(Q)$ будем отождествлять с подпространством функций из $W_2^p(\mathbb{R}^n)$, равных нулю вне Q.

Рассмотрим ограниченный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$Ru(x) = u(q^{-1}x) = u\left(\frac{x_1}{q}, \ldots, \frac{x_n}{q}\right), \quad q > 1.$$

Очевидно,

$$R^{-1}u(x) = u(qx), \quad R^*u(x) = q^n u(qx).$$

Отсюда следует, что оператор $q^{-n/2}R$ унитарен, а оператор R — нормальный.

Пусть $\mathcal{A}$ — минимальная замкнутая подалгебра алгебры ограниченных операторов $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$, содержащая операторы I, R, R^*. Она является коммутативной B^*-алгеброй. По теореме 1.5 спектр операторов в $\mathcal{A}$ совпадает с их спектром в $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$. В силу теоремы 1.4 существует изометрический изоморфизм $\Psi : C(\sigma(R)) \to \mathcal{A}$ алгебры непрерывных функций на спектре оператора R на алгебру $\mathcal{A}$ такой, что

$$\Psi\overline{a(\lambda)} = (\Psi a(\lambda))^*, \quad a \in C(\sigma(R)),$$

$$\Psi 1 = I, \quad \Psi\lambda = R.$$

Функцию $a(\lambda)$ будем называть символом оператора $A(R) = \Psi a$, а элементы алгебры $\mathcal{A}$ — операторами линейного преобразования аргументов (с постоянными коэффициентами). Таким образом, каждому оператору линейного преобразования аргументов отвечает его символ — непрерывная функция на $\sigma(R)$. Очевидно, спектр оператора есть множество значений его символа.

Утверждение следующей леммы общеизвестно, однако мы приводим его с доказательством для связности изложения.

Лемма 6.1. $\sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = q^{n/2}\}$.

Доказательство. Оператор $q^{-n/2}R$ унитарен, поэтому $\sigma(R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = q^{n/2}\}$. Покажем, что не существует ограниченного обратного оператора $(R-\lambda I)^{-1}$, если $|\lambda| = q^{n/2}$. Достаточно построить последовательность u_k $(k=1,2,\ldots)$ такую, что последовательность $(R-\lambda I)u_k$ ограничена, а $\|u_k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to \infty$ при $k \to \infty$.

Положим

$$u_k(x) = \begin{cases} \lambda^{j-1} & (q^{-j} < |x| < q^{-j+1},\ j=1,\ldots,k), \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда

$$\|u_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{k} q^{n(j-1)} \mathrm{mes}\left(\left\{q^{-j} < |x| < q^{-j+1}\right\}\right) =$$

$$= k(1-q^{-n})\mathrm{mes}\left(\{|x|<1\}\right) \to \infty.$$

При этом

$$(R-\lambda I)u_k(x) = \begin{cases} -\lambda^{k-1} & (q^{-k} < |x| < q^{-k+1}), \\ \quad 1 & (1 < |x| < q), \\ \quad 0 & \text{для остальных } x, \end{cases}$$

и $\|(R-\lambda I)u_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (q^n - q^{-n})\mathrm{mes}\left(\{|x|<1\}\right)$. Лемма доказана. $\square$

Легко вычисляется резольвента $(R-\lambda_0 I)^{-1}$ оператора R. Пусть, например, $|\lambda_0| > q^{n/2}$. Тогда для достаточно малых положительных ε функция $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ аналитична в круге $\{|\lambda| < q^{n/2}+\varepsilon\}$ и, следовательно, на окружности $\{|\lambda| = q^{n/2}\}$ представляется равномерно сходящимся рядом Тейлора:

$$(\lambda-\lambda_0)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} \lambda^k.$$

Значит,

$$(R-\lambda_0 I)^{-1}u(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} u(q^{-k}x) \quad (|\lambda_0| > q^{n/2}). \tag{6.1}$$

Если же $|\lambda_0| < q^{n/2}$, то функция $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ аналитична при $\{|\lambda| > q^{n/2}-\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ и на окружности $\{|\lambda| = q^{n/2}\}$ раскладывается в ряд

Лорана:

$$(\lambda - \lambda_0)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^{k-1} \lambda^{-k}.$$

Значит,

$$(R - \lambda_0 I)^{-1} u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^{k-1} u(q^k x) \quad (|\lambda_0| < q^{n/2}). \tag{6.2}$$

Важную роль будет играть следующее условие на геометрию области Q:

$$\overline{Q} \subset qQ. \tag{6.3}$$

Лемма 6.2. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (6.3). *Тогда*

а) *если $|\lambda_0| > q^{n/2}$, то отображение $(R - \lambda_0 I) : W_2^p(Q) \to W_2^p(Q)$ есть изоморфизм для всех $p = 0, 1, \ldots$;*

б) *если $|\lambda_0| < q^{n/2-p}$ $(p = 0, 1, \ldots)$, то отображение $(R - \lambda_0 I) : \mathring{W}_2^p(Q) \to \mathring{W}_2^p(Q)$ есть изоморфизм.*

Доказательство. а) При помощи почленного дифференцирования ряда в формуле (6.1) убеждаемся в том, что оператор $(R - \lambda_0 I)^{-1}$ ограничен в $W_2^p(\mathbb{R}^n)$ для любого $p = 0, 1, \ldots$. Таким образом, $R - \lambda_0 I$ взаимно однозначно отображает $W_2^p(\mathbb{R}^n)$ на себя. Возьмем $u \in W_2^p(\mathbb{R}^n)$, $v = (R - \lambda_0 I)u \in W_2^p(\mathbb{R}^n)$. В силу условия (6.3) на область Q сужение $v|_Q$ однозначно определяется сужением $u|_Q$, так что оператор $(R - \lambda_0 I) : W_2^p(Q) \to W_2^p(Q)$ корректно определен. Из (6.1) следует обратное: сужение прообраза $u|_Q$ однозначно определяется сужением $v|_Q$. Другими словами, ограниченный оператор $(R - \lambda_0 I) : W_2^p(Q) \to W_2^p(Q)$ ограниченно обратим, и обратный к нему имеет вид (6.1).

б) Аналогично предыдущему пункту, почленное дифференцирование ряда (6.2) p раз в случае $|\lambda_0| < q^{n/2-p}$ показывает, что $R - \lambda_0 I$ взаимно однозначно отображает $W_2^p(\mathbb{R}^n)$ на себя и для таких λ_0. Более того, из формулы (6.2) видно, что условия $u(x) = 0$ $(x \notin Q)$ и $v(x) = 0$ $(x \notin qQ)$ равносильны. Лемма доказана. $\square$

Имея далее в пособии дело с областью Q, мы всюду по умолчанию будем предполагать ее ограниченной и удовлетворяющей условию (6.3).

Лемма 6.3. *Пусть* $|\lambda_0| = q^{n/2}$, $u \in L_2(Q)$, $v = (R - \lambda_0 I)u \in L_2(Q)$. *Тогда*

$$u(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} v(q^{-k}x) \quad (x \in Q). \tag{6.4}$$

Кроме того, из принадлежности функции v пространству $W_2^p(Q)$ следует, что функция u также принадлежит $W_2^p(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим конечную сумму ряда (6.4). Подставляя вместо $v(x)$ выражение $u(q^{-1}x) - \lambda_0 u(x)$, получим

$$-\sum_{k=0}^{M-1} \lambda_0^{-(k+1)} v(q^{-k}x) = u(x) - \lambda_0^{-M} u(q^{-M}x) \quad (x \in Q).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\|\lambda_0^{-M} R^M u\|^2_{L_2(Q)} = |\lambda_0|^{-2M} \int\limits_Q |u(q^{-M}x)|^2\, dx =$$

$$= q^{nM} |\lambda_0|^{-2M} \int\limits_{q^{-M}Q} |u(y)|^2\, dy = \|u\|^2_{L_2(q^{-M}Q)} \to 0, \quad M \to \infty.$$

Второе утверждение леммы следует из (6.4) путем дифференцирования ряда. $\square$

6.2. Модельное уравнение со сжатиями аргументов

В ограниченной области Q, $\partial Q \in C^\infty$, удовлетворяющей условию (6.3), рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$-\Delta A(R) u = f(x) \quad (x \in Q) \tag{6.5}$$

с краевым условием

$$u\,|_{\partial Q}=0, \tag{6.6}$$

где функциональный оператор $A(R)$ задан формулой

$$A(R)u(x)=\sum_{k=0}^{l}a_k u(q^{-k}x) \quad (a_k\in\mathbb{C},\ k=0,\dots,l),$$

а $f\in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция.

Введем полином $a(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda^k$ комплексного переменного λ. Выражение $a(\lambda)|\xi|^2$ ($\lambda\in\mathbb{C}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$) естественно назвать символом уравнения (6.5).

Обобщенным решением краевой задачи (6.5), (6.6) назовем функцию $u\in\mathring{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \nabla A(R)u(x)\cdot\overline{\nabla\varphi(x)}\,dx=\int\limits_Q f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx \quad (\varphi\in\mathring{W}_2^1(Q)).$$

Решение задачи (6.5), (6.6) в случае уравнения с постоянными коэффициентами основано на возможности разложения функционального оператора $A(R)$ в произведение двучленных операторов вида $R-\lambda_j I$.

Теорема 6.1. *Пусть $a(\lambda)\neq 0$ при $|\lambda|<q^{n/2-1}$. Тогда для любой функции $f\in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение u краевой задачи* (6.5), (6.6). *Если $f\in W_2^p(Q)$, то $u\in W_2^{p+2}(Q)$.*

Доказательство. Предположим вначале, что $A(R)=R-\lambda_0 I$. По условию теоремы $|\lambda_0|\geqslant q^{n/2-1}$. Пусть $u\in\mathring{W}_2^1(Q)$ — обобщенное решение задачи (6.5), (6.6). Обозначим $v=(R-\lambda_0 I)u\in W_2^1(Q)$. Тогда

$$v_{x_i}=(q^{-1}R-\lambda_0 I)u_{x_i}=q^{-1}(R-q\lambda_0 I)u_{x_i},$$

причем $|q\lambda_0|\geqslant q^{n/2}$. В силу лемм 6.2, 6.3,

$$u_{x_i}=-q\sum_{k=0}^{\infty}(q\lambda_0)^{-(k+1)}v_{x_i}(q^{-k}x)$$

(ряд сходится в $L_2(Q)$). Из определения обобщенного решения следует, что

$$(\nabla v, \nabla \varphi)_{L_2(Q)} = (f, \varphi)_{L_2(Q)}$$

для любой функции $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Функция $R^{-k}\varphi(x) = \varphi(q^k x)$ также принадлежит $\mathring{W}_2^1(Q)$. Подставим ее в интегральное тождество вместо φ:

$$\big(\nabla v, \nabla(R^{-k}\varphi)\big)_{L_2(Q)} = (f, R^{-k}\varphi)_{L_2(Q)}.$$

Дифференцируя $R^{-k}\varphi$ и перенося оператор R^{-k} в левые части скалярных произведений, получим

$$(R^k \nabla v, \nabla \varphi)_{L_2(Q)} = (q^{-k} R^k f, \varphi)_{L_2(Q)}.$$

Просуммировав по всем $k = 0, 1, \dots$ с коэффициентами $-q(q\lambda_0)^{-(k+1)}$, будем иметь

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_{L_2(Q)} = (q^2 (R - q^2 \lambda_0 I)^{-1} f, \varphi)_{L_2(Q)}.$$

Заметим, что функция $q^2(R - q^2\lambda_0 I)^{-1} f \in L_2(Q)$.

Итак, в случае $A(R) = R - \lambda_0 I$, $|\lambda_0| \geqslant q^{n/2-1}$ обобщенное решение задачи (6.5), (6.6) является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = q^2 (R - q^2 \lambda_0 I)^{-1} f(x) \quad (x \in Q).$$

После l итераций в случае

$$A(R) = a_l (R - \lambda_1 I) \dots (R - \lambda_l I), \quad |\lambda_j| \geqslant q^{n/2-1} \quad (j = 1, \dots, l)$$

приходим к уравнению

$$-\Delta u(x) = a_l^{-1} q^{2l} (R - q^2 \lambda_1 I)^{-1} \dots (R - q^2 \lambda_l I)^{-1} f(x) \quad (x \in Q) \tag{6.7}$$

с краевым условием (6.6).

С другой стороны, всякое обобщенное решение задачи (6.7), (6.6) принадлежит $W_2^2(Q)$ и почти всюду в Q удовлетворяет уравнению (6.7), а значит, и уравнению (6.5). Таким образом, задача (6.5), (6.6) эквивалентна задаче (6.7), (6.6). Последняя имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ для любой функции $f \in L_2(Q)$. При этом, если $f \in W_2^p(Q)$, то $u \in W_2^{p+2}(Q)$ и справедлива оценка $\|u\|_{W_2^{p+2}(Q)} \leqslant c\|f\|_{W_2^p(Q)}$, где положительная постоянная c не зависит от f. □

Пример 6.1. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta\left(u(x) + a_1 u(q^{-1}x)\right) = f(x) \quad (x \in Q). \tag{6.8}$$

Условие $|\lambda_1| \geqslant q^{n/2-1}$ на корень полинома $a(\lambda) = 1 + a_1\lambda$ означает, что $|a_1| \leqslant q^{1-n/2}$. По теореме 6.1 краевая задача (6.8), (6.6) имеет единственное решение $u \in \mathring{W}_2^1(Q) \cap W_2^2(Q)$ для любой функции $f \in L_2(Q)$, если $|a_1| \leqslant q^{1-n/2}$.

Теорема 6.2. *Предположим, что хотя бы один из корней полинома $a(\lambda)$ попадает внутрь круга $|\lambda| < q^{n/2-1}$. Тогда задача* (6.5), (6.6) *имеет обобщенное решение для любой функции $f \in L_2(Q)$, причем при $f = 0$ существует бесконечно много линейно независимых обобщенных решений соответствующей однородной задачи, не принадлежащих $W_2^2(Q)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — корни полинома $a(\lambda)$. Будем считать, что

$$|\lambda_j| \geqslant q^{n/2-1}\ (j = 1, \dots, k_0), \quad |\lambda_j| < q^{n/2-1}\ (j = k_0+1, \dots, l),$$

причем $k_0 < l$. Обозначим

$$A_1 = (R - \lambda_{k_0+1}I)\dots(R - \lambda_l I), \quad A_2 = a_l(R - \lambda_1 I)\dots(R - \lambda_{k_0} I).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta A_2(R) v_2 = f(x) \quad (x \in Q), \tag{6.9}$$

$$v_2 \mid_{\partial Q} = 0. \tag{6.10}$$

По теореме 6.1 она имеет единственное обобщенное решение $v_2 \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Возьмем произвольную функцию $v_1 \in \mathring{W}_2^1(q^{l-k_0}Q \setminus \overline{Q})$ и положим

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x), & x \in q^{l-k_0}Q \setminus \overline{Q}, \\ v_2(x), & x \in Q. \end{cases}$$

Очевидно, $v \in \mathring{W}_2^1(q^{l-k_0}Q)$. Далее, из леммы 6.2 следует, что оператор $A_1(R) : \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^1(q^{l-k_0}Q)$ имеет ограниченный обратный. Пусть $u = A_1^{-1}(R)v$. Очевидно, $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$. Мы утверждаем, что u есть обобщенное решение задачи (6.5), (6.6). Действительно, для любой функции $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$ имеем

$$(\nabla A(R)u, \nabla\varphi)_{L_2(Q)} = (\nabla A_2(R)A_1(R)u, \nabla\varphi)_{L_2(Q)} =$$

$$= (\nabla A_2(R)v, \nabla\varphi)_{L_2(Q)} = (\nabla A_2(R)v_2, \nabla\varphi)_{L_2(Q)} = (f, \varphi)_{L_2(Q)}.$$

Последнее равенство вытекает из того, что функция v_2 есть обобщенное решение задачи (6.9), (6.10).

Кроме того, из формулы (6.2), задающей вид обратного оператора $A_1^{-1}(R)$, следует, что

$$v_1 \notin W_2^2(q^{l-k_0}Q \setminus q^{l-k_0-1}\overline{Q}) \implies u \notin W_2^2(Q \setminus Q^{-1}Q),$$

т.е. по произвольной (никак не связанной с f) негладкой функции v_1 строится негладкое обобщенное решение краевой задачи (6.5), (6.6). $\square$

Теорема 6.3. *Пусть $a(\lambda)$ не обращается в ноль при $|\lambda| \leqslant q^{n/2-2}$. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (6.5), (6.6)*, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$. Если $f \in W_2^p(Q)$, то это решение и принадлежит $W_2^{p+2}(Q)$ и имеет место оценка $\|u\|_{W_2^{p+2}(Q)} \leqslant c\|f\|_{W_2^p(Q)}$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от f.*

Доказательство. Если обобщенное решение u задачи (6.5), (6.6) принадлежит $W_2^2(Q)$, то оно почти всюду в Q удовлетворяет уравнению

(6.5), которое можно записать в виде $-\sum\limits_{k=0}^{l} a_k q^{-2k}(\Delta u)(q^{-k}x) = f(x)$, или, короче,

$$-A(q^{-2}R)\Delta u = f. \tag{6.11}$$

По условию теоремы все корни λ_j полинома $a(\lambda)$ удовлетворяют условию $|\lambda_j| > q^{n/2-2}$. Корнями полинома $a(q^{-2}\lambda)$ будут тогда числа $q^2\lambda_j$, причем $|q^2\lambda_j| > q^{n/2}$. В силу леммы 6.2 оператор

$$A(q^{-2}R) = a_l q^{2l}(R - q^2\lambda_1 I)\dots(R - q^2\lambda_l I)$$

есть изоморфизм пространства $L_2(Q)$. Поэтому уравнение (6.11) равносильно уравнению (6.7).

Итак, в условиях теоремы всякое гладкое решение задачи (6.5), (6.6) является решением задачи (6.7), (6.6). Очевидно, верно и обратное. Из свойств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона и ограниченности оператора $[A(q^{-2}R)]^{-1}$ в $W_2^p(Q)$ при любом $p = 0, 1, \dots$ следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 6.3 в сочетании с теоремой 6.2 означает, что при соответствующем расположении корней полинома $a(\lambda)$ одновременно с наличием бесконечного множества негладких обобщенных решений существует единственное гладкое решение задачи (6.5), (6.6), непрерывно зависящее от правой части.

6.3. Модельное уравнение со сжатиями и растяжениями

В случае, когда сдвиги аргументов отображают некоторые точки области Q в $\mathbb{R}^n\setminus\overline{Q}$, краевые условия для функционально-дифференциального уравнения задаются в окрестности области Q.

Рассмотрим следующую задачу:

$$-\Delta A(R)u = f(x) \quad (x \in Q), \tag{6.12}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q), \tag{6.13}$$

где теперь функциональный оператор действует по формуле

$$A(R)u(x) = \sum_{k=-l_2}^{l_1} a_k u(q^{-k}x) \quad (a_k \in \mathbb{C}),$$

причем $l_2 > 0$, $a_{-l_2} \neq 0$. Символом уравнения (6.12) будет выражение $a(\lambda)|\xi|^2 = \sum\limits_{k=-l_2}^{l_1} a_k \lambda^k |\xi|^2$. Как и прежде, под обобщенным решением краевой задачи понимаем функцию $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ (продолженную нулем в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\nabla A(R)u, \nabla \varphi)_{L_2(Q)} = (f, \varphi)_{L_2(Q)} \quad (\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)).$$

Установим связь между расположением нулей выражения $a(\lambda)$ и разрешимостью задачи (6.12), (6.13). Для этого представим $a(\lambda)$ в виде

$$a(\lambda) = \lambda^{-l_2} \sum_{k=0}^{l_1+l_2} a_{k-l_2} \lambda^k = a_{l_1} \lambda^{-l_2} (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_{l_1+l_2}),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l_1+l_2}$ — корни полинома $\lambda^{l_2} a(\lambda)$. Будем считать, что

$$|\lambda_j| \geqslant q^{n/2-1} \ (j = 1, \ldots, k_0), \quad |\lambda_j| < q^{n/2-1} \ (j = k_0+1, \ldots, l_1+l_2),$$

где $0 \leqslant k_0 \leqslant l_1 + l_2$. Введем операторы

$$A_1 = (R - \lambda_{k_0+1} I) \ldots (R - \lambda_{l_1+l_2} I) R^{-l_2}, \quad A_2 = a_{l_1} (R - \lambda_1 I) \ldots (R - \lambda_{k_0} I),$$

так что $A = A_2 A_1$. По лемме 6.2 отображение $A_1 : \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^1(q^{l_1-k_0} Q)$ есть изоморфизм.

Теорема 6.4. а) *Если $k_0 = l_1$, то для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (6.12), (6.13).

б) *Если $k_0 < l_1$, то для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение задачи* (6.12), (6.13)*; при $f = 0$ однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений.*

в) *Если $k_0 > l_1$, то обобщенное решение задачи* (6.12), (6.13) *существует в том и только том случае, когда функция f ортогональна* *некоторому бесконечномерному подпространству в $L_2(Q)$; при $f=0$ однородная задача имеет единственное тривиальное решение.*

Доказательство. Изоморфизм $A_1 : \mathring{W}_2^1(Q) \to \mathring{W}_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$ позволяет сделать замену $A_1u = v$. Интегральное тождество для функции $v \in \mathring{W}_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$ примет вид

$$(\nabla A_2(R)v, \nabla\varphi)_{L_2(Q)} = (f,\varphi)_{L_2(Q)}.$$

Последнее, учитывая расположение корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{k_0}$, равносильно

$$(\nabla v, \nabla\varphi)_{L_2(Q)} = (g,\varphi)_{L_2(Q)} \quad (\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)). \tag{6.14}$$

Рассмотрим задачу нахождения функции $v \in \mathring{W}_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$ из интегрального тождества (6.14) при различных значениях k_0.

а) В случае $k_0 = l_1$ функция $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta v = g$ в области Q. Такое решение существует и единственно для любой правой части и, кроме того, принадлежит $W_2^2(Q)$. При этом

$$\|v\|_{W_2^2(Q)} \leqslant c_1\|g\|_{L_2(Q)} \leqslant c_2\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Таким образом, задача (6.12), (6.13) имеет единственное обобщенное решение $u = A_1^{-1}v \in \mathring{W}_2^1(Q)$, непрерывно зависящее от правой части: $\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_3\|f\|_{L_2(Q)}$. Отметим, что непрерывная зависимость гарантируется лишь по норме $W_2^1(Q)$ — оператор A_1^{-1} может быть и неограниченным в $W_2^2(Q)$.

б) В случае $k_0 < l_1$, повторяя в точности рассуждения из доказательства теоремы 6.2, получаем утверждение второго пункта теоремы.

в) Пусть $k_0 > l_1$. Функция $v(x)$ в интегральном тождестве (6.14) обращается в ноль в $Q\backslash q^{l_1-k_0}\overline{Q}$. Следовательно, $g(x)=0$ ($x \in Q\backslash q^{l_1-k_0}\overline{Q}$) и равенство

$$(\nabla v, \nabla\varphi)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} = (g,\varphi)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} \tag{6.15}$$

должно выполняться уже для любой функции $\varphi \in W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$.

Покажем, что для существования функции $v \in \mathring{W}_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$, удовлетворяющей интегральному тождеству (6.15) (при любой $\varphi \in W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$), необходимо и достаточно, чтобы правая часть g была ортогональна в скалярном произведении в $L_2(q^{l_1-k_0}Q)$ бесконечномерному подпространству, состоящему из гармонических функций, принадлежащих $W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$. Действительно, пусть $\varphi_1 \in W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$ — гармоническая функция. В этом случае при подстановке $\varphi = \varphi_1$ в тождество (6.15) левая часть обратится в ноль. Следовательно, $(g, \varphi_1)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} = 0$. Обратно, пусть $(g, \varphi_1)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} = 0$ для всех гармонических функций $\varphi_1 \in W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$. Легко видеть, что множество гармонических функций есть ортогональное дополнение к подпространству $\mathring{W}_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$ в эквивалентном скалярном произведении

$$(\varphi, \psi)_{W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)} = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} + (\varphi, \psi)_{L_2(\partial(q^{l_1-k_0}Q))}.$$

Таким образом, произвольную функцию $\varphi \in W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$ можно единственным образом разложить в сумму $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где функция φ_1 — гармоническая, а $\varphi_2 \,|_{\partial(q^{l_1-k_0}Q)} = 0$. Но тогда

$$(\nabla v, \nabla\varphi)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} = (\nabla v, \nabla\varphi_2)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)},$$

$$(g, \varphi)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} = (g, \varphi_2)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)},$$

в результате чего (6.15) сводится к

$$(\nabla v, \nabla\varphi_2)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)} = (g, \varphi_2)_{L_2(q^{l_1-k_0}Q)}, \tag{6.16}$$

где функция $\varphi_2 \in \mathring{W}_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$ произвольна. Последнее соотношение определяет решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области $q^{l_1-k_0}Q$, которое существует и единственно для любой функции g.

Итак, задача (6.12), (6.13) разрешима только при тех $f \in L_2(Q)$, для которых функция $g = [A_2(q^{-2}R)]^{-1}f \in L_2(Q)$ обращается в ноль вне

$q^{l_1-k_0}Q$, а в $L_2(q^{l_1-k_0}Q)$ ортогональна всем гармоническим функциям из $W_2^1(q^{l_1-k_0}Q)$.

При $f = 0$ имеем $g = 0$, откуда следует в силу (6.16), что $v = 0$, а значит, $u = A_1^{-1}v = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи (6.12), (6.13) единственно. Теорема доказана. $\square$

В ситуации, когда задача (6.12), (6.13) однозначно разрешима ($k_0 = l_1$), рассмотрим вопрос гладкости обобщенных решений. Прежде всего покажем, что для решения $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ задачи (6.12), (6.13) условие $u \in W_2^2(Q)$ равносильно условию $u \in \mathring{W}_2^2(Q)$. Действительно, предположение о том, что $u \in W_2^2(Q)$, в то время как $\partial u/\partial\nu \mid_{\partial Q} \neq 0$, приведет к несовпадению следов нормальной производной функции

$$v = A_1(R)u = (R - \lambda_{k_0+1}I)\ldots(R - \lambda_{l_1+l_2}I)R^{-l_2}u$$

вдоль многообразия $q^{-l_2}\partial Q \subset Q$, т.е. $v \notin W_2^2(Q)$. С другой стороны, как видно из доказательства теоремы 6.4, функция v является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона, а значит, принадлежит $W_2^2(Q)$. Полученное противоречие означает, что гладкие решения обязательно принадлежат $\mathring{W}_2^2(Q)$, т.е. имеют равную нулю нормальную производную на границе ∂Q.

Итак, пусть $u \in \mathring{W}_2^2(Q)$ — решение задачи (6.12), (6.13) и $v = A_1u$. Тогда функция v принадлежит $\mathring{W}_2^2(Q)$ и является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью $g = [A_2(q^{-2}R)]^{-1}f$. Это означает, что интегральное тождество

$$(\nabla v, \nabla\varphi)_{L_2(Q)} = (g, \varphi)_{L_2(Q)}$$

выполняется для произвольной функции $\varphi \in W_2^1(Q)$ (интеграл по ∂Q в данном случае аннулируется за счет того, что $\partial v/\partial\nu \mid_{\partial Q} = 0$). Как мы убедились выше, это равносильно равенству $(g, \varphi_1)_{L_2(Q)} = 0$ для всех гармонических функций $\varphi_1 \in W_2^1(Q)$. Получается, что для гладкости решения задачи (6.12), (6.13) необходимо выполнение бесконечного числа условий ортогональности

$$\left(f, \left([A_2(q^{-2}R)]^{-1}\right)^* \varphi_1\right)_{L_2(Q)} = 0,$$

где $\varphi_1 \in W_2^1(Q)$ — произвольная гармоническая функция, а оператор $\left([A_2(q^{-2}R)]^{-1}\right)^*$ есть сопряженный к ограниченному оператору

$$[A_2(q^{-2}R)]^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q).$$

С другой стороны, эти условия будут также и достаточными, если $|\lambda_j| < q^{n/2-2}$ $(j = k_0 + 1, \dots, l_1 + l_2)$. Это следует из леммы 6.2.

6.4. Операторы сжатия в пространствах символов

Целью оставшейся части текущего пункта является доказательство фредгольмовой разрешимости общей краевой задачи для уравнения высокого порядка со сжатиями аргументов в старших производных и переменными коэффициентами, являющейся естественным обобщением задачи, рассмотренной в пункте 6.2. Это будет сделано в предположении об эллиптичности соответствующей “локальной” задачи (в ней собраны члены, не содержащие преобразований аргументов; локальная часть оператора из пункта 6.2 представляла собой оператор Лапласа). Опираясь на существование регуляризатора “локальной” задачи, мы строим регуляризатор исходной задачи с применением некоторых элементов теории псевдодифференциальных операторов. В настоящем и следующем пунктах изложен подготовительный материал.

Как это обычно принято, для каждого вещественного m обозначим через $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ множество всех функций $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

таких, что при любых мультииндексах α, β

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad (x,\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Множество S^m называется пространством символов порядка m. На S^m определены полунормы

$$p_{\alpha\beta}^{(m)}(a) = \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{|\alpha|-m} |D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|.$$

Наделенное такими полунормами, S^m становится пространством Фреше.

Пусть $q>1$. Рассмотрим отображение $\Lambda : S^\mu \to S^\mu$,

$$(\Lambda a)(x,\xi) = a(q^{-1}x, q\xi) \quad (a \in S^\mu),$$

непрерывное в S^μ при любом μ. Конечные линейные комбинации вида $\sum a_k(x,\xi)\Lambda^k$ с коэффициентами из S^m представляют, очевидно, ограниченные операторы $S^\mu \to S^{\mu+m}$. Нам понадобятся и бесконечные линейные комбинации, т.е. ряды, введение которых подразумевает определенную степень убывания коэффициентов a_k. Получающимся при этом операторам будут соответствовать аналитические в круге $\Omega_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ функции $a(\lambda)$ со значениями в S^m.

Заметим, что скалярные аналитические в Ω_r функции $a(\lambda)$ есть в точности суммы степенных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k$ с коэффициентами a_k такими, что для любого $r' < r$ имеется оценка $|a_k| \leqslant \max\limits_{|\lambda|=r'} |a(\lambda)|\, r'^{-k}$ (неравенства Коши). Это соответствие, основанное на интегральной формуле Коши, очевидным образом переносится на аналитические функции со значениями в пространстве Фреше.

Пусть X — пространство Фреше с топологией, порожденной счетной системой полунорм p_N, $N = 1, 2, \ldots$. Семейство X-значных аналитических в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ функций обозначим $\mathcal{H}(\Omega, X)$.

Если $\Omega = \Omega_r$, то ряд $f(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k$ $(f_k \in X)$ представляет функцию $f \in \mathcal{H}(\Omega_r, X)$ тогда и только тогда, когда

$$p_N(f_k) \leqslant c_N(r')r'^{-k} \quad (r' < r). \tag{6.17}$$

При этом $f_k = (k!)^{-1} f^{(k)}(0)$, и $c_N(r') = \max\limits_{|\lambda|=r'} p_N(f(\lambda))$ в неравенстве (6.17).

На пространстве $\mathcal{H}(\Omega_r, X)$ определены полунормы

$$p_{N,r'}(f) = \max_{|\lambda|=r'} p_N(f(\lambda)) \quad (N = 1, 2, \ldots;\ r' < r).$$

Для произвольной фиксированной последовательности чисел $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r$, $r_j \to r$, счетный набор полунорм P_{N,r_j} задает на $\mathcal{H}(\Omega_r, X)$ топологию пространства Фреше. В случае $X = S^m$ соответствующие полунормы будем обозначать $p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}$. А именно,

$$p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a) = \max_{|\lambda|=r'} p^{(m)}_{\alpha\beta}(a(\lambda)) \quad (a \in \mathcal{H}(\Omega_r, S^m)).$$

Теорема 6.5. *Пусть функция $a = a(x, \xi, \lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(\Omega_r, S^m)$ и удовлетворяет условию*

$$a^{(k)}(x, \xi, 0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots;\ |\xi| \leqslant C_0). \tag{6.18}$$

Тогда формула

$$a(x, \xi, \Lambda)u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^{(k)}(x, \xi, 0)\Lambda^k u \tag{6.19}$$

определяет непрерывное билинейное отображение

$$\mathcal{H}(\Omega_r, S^m) \times S^\mu \ni (a, u) \longrightarrow a(x, \xi, \Lambda)u \in S^{\mu+m}$$

для всех $\mu < \log_q r$.

Доказательство. Используя для коэффициента $(j!)^{-1}a^{(j)}(x, \xi, 0)$ сокращенное обозначение $a_j(x, \xi)$, оценим полунормы функции $a_j\Lambda^j u$ в пространстве $S^{m+\mu}$. В силу условия 6.18 на коэффициенты a_j можно записать

$$p_{\alpha\beta}^{(m+\mu)}(a_j\Lambda^j u) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\,|\xi|\geqslant C_0}(1+|\xi|)^{|\alpha|-(m+\mu)}|D_\xi^\alpha D_x^\beta(a_j\Lambda^j u)(x,\xi)|.$$

Применяя 6.17 в ситуации $X = S^m$, получим при $r' < r$:

$$(1+|\xi|)^{|\alpha_1|-m}\,|D_\xi^{\alpha_1}D_x^{\beta_1}a_j(x,\xi)| \leqslant p_{\alpha_1\beta_1}^{(m)}(a_j) \leqslant p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m,r)}(a) r'^{-j}. \tag{6.20}$$

Используя очевидное неравенство

$$\left(\frac{1+|\xi|}{1+t|\xi|}\right)^{|\alpha_2|-\mu} \leqslant c_1 t^{\mu-|\alpha_2|} \quad (t\geqslant 1,\ |\xi|\geqslant C_0),$$

при $|\xi| \geqslant C_0$ будем иметь

$$(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}\,|D_\xi^{\alpha_2}D_x^{\beta_2}(\Lambda^j u)(x,\xi)| =$$
$$= q^{j(|\alpha_2|-|\beta_2|)}(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}\,|(D_\xi^{\alpha_2}D_x^{\beta_2}u)(q^{-j}x, q^j\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant q^{j|\alpha_2|}(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}(1+q^j|\xi|)^{\mu-|\alpha_2|}p_{\alpha_2\beta_2}^{(\mu)}(u) \leqslant c_1 q^{j\mu}p_{\alpha_2\beta_2}^{(\mu)}(u). \tag{6.21}$$

Применяя формулу Лейбница и учитывая (6.20), (6.21), получим при $|\xi| \geqslant C_0$ и $r' < r$

$$(1+|\xi|)^{|\alpha|-(m+\mu)}\,|D_\xi^\alpha D_x^\beta(a_j\Lambda^j u)(x,\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}}\binom{\alpha}{\alpha_1}\binom{\beta}{\beta_1}(1+|\xi|)^{|\alpha_1|-m}\,|D_\xi^{\alpha_1}D_x^{\beta_1}a_j|(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}\,|D_\xi^{\alpha_2}D_x^{\beta_2}\Lambda^j u| \leqslant$$
$$\leqslant c_2\left\{\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m,r)}(a)p_{\alpha_2\beta_2}^{(\mu)}(u)\right\}\left(\frac{q^\mu}{r'}\right)^j.$$

Если $r > q^\mu$, то можно взять $r' > q^\mu$. Тогда ряд (6.19) сходится в $S^{m+\mu}$, причем

$$p_{\alpha\beta}^{(m+\mu)}\,(a(x,\xi,\Lambda)u) \leqslant c_{\alpha\beta}(r')\sum p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m,r)}(a)p_{\alpha_2\beta_2}^{(\mu)}(u).$$

Полученная оценка доказывает теорему. □

В заключение отметим, что требование (6.18) (в соответствии с которым все коэффициенты ряда (6.19), начиная с некоторого номера, равны нулю при малых ξ), совершенно не обременительное с точки зрения теории псевдодифференциальных операторов, позволяет игнорировать рост производных по ξ в точке $\xi = 0$ у функций $\Lambda^j u$ при неограниченном увеличении j.

Функции из $\mathcal{H}(\Omega_r, S^m)$, удовлетворяющие условию (6.18), будем называть символами класса (m, r). Каждому символу $a(x, \xi, \lambda)$ класса (m, r) по теореме 6.5 соответствует ограниченный оператор

$$a(x, \xi, \Lambda) : S^\mu \to S^{\mu+m} \quad (\mu < \log_q r).$$

Рассмотрим вопрос о композиции операторов.

Теорема 6.6. *Пусть* $a = a(x, \xi, \lambda)$, $b = b(x, \xi, \lambda)$ — *символы класса* (m_1, r), (m_2, r) *соответственно. Тогда произведение* $a(x, \xi, \Lambda)b(x, \xi, \Lambda)$ *есть оператор* $c(x, \xi, \Lambda)$ *с символом* $c(x, \xi, \lambda)$ *класса* $(m_1 + m_2, q^{-m_2} r)$. *Билинейное отображение*

$$\mathcal{H}(\Omega_r, S^{m_1}) \times \mathcal{H}(\Omega_r, S^{m_2}) \ni (a, b) \longrightarrow c \in \mathcal{H}(\Omega_{q^{-m_2} r}, S^{m_1+m_2})$$

непрерывно.

Доказательство. Перемножая ряды, получим

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, \xi)\Lambda^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x, \xi)\Lambda^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, \xi)\Lambda^k,$$

где

$$c_k(x, \xi) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x, \xi) b_{k-j}(q^{-j}x, q^j \xi). \tag{6.22}$$

Из (6.22) следует, что $c_k \in S^{m_1+m_2}$ и выполняется условие (6.18). Оценим полунормы c_k в $S^{m_1+m_2}$:

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(c_k) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\xi| \geqslant C_0} (1 + |\xi|)^{|\alpha| - (m_1+m_2)} |D_\xi^\alpha D_x^\beta c_k(x, \xi)|.$$

Аналогично доказательству теоремы 6.5 будем иметь

$$(1 + |\xi|)^{|\alpha_1| - m_1} |D_\xi^{\alpha_1} D_x^{\beta_1} a_j| \leqslant p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m,r)}(a) r'^{-j};$$

$$(1 + |\xi|)^{|\alpha_2| - m_2} |D_\xi^{\alpha_2} D_x^{\beta_2} \Lambda^j b_{k-j}| \leqslant \mathrm{const} \cdot q^{jm_2} p_{\alpha_2\beta_2}^{(m_2)}(b_{k-j}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const} \cdot q^{jm_2} p_{\alpha_2\beta_2 r'}^{(m_2,r)}(b) r'^{j-k}.$$

Тогда

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(a_j\Lambda^j b_{k-j}) \leqslant \mathrm{const}\cdot q^{jm_2}r'^{-k}\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m_1,r)}(a)p_{\alpha_2\beta_2 r'}^{(m_2,r)}(b)$$

и

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(c_k) \leqslant \mathrm{const}\cdot (q^{-m_2}r')^{-k}\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m_1,r)}(a)p_{\alpha_2\beta_2 r'}^{(m_2,r)}(b).$$

Но $r' < r$ — произвольно. Следовательно, для любого $\overline{r} < q^{-m_2}r$ верна оценка

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(c_k) \leqslant C_{\alpha\beta}(\overline{r})\left\{\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1,\beta_1,q^{m_2}\overline{r}}^{(m_1,r)}(a)p_{\alpha_2,\beta_2,q^{m_2}\overline{r}}^{(m_2,r)}(b)\right\}\overline{r}^{-k}.$$

Поэтому

$$p_{\alpha\beta\overline{r}}^{(m_1+m_2,q^{-m_2}r)}(c) \leqslant C_{\alpha\beta}(\overline{r},\varepsilon)\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1,\beta_1,q^{m_2}(\overline{r}+\varepsilon)}^{(m_1,r)}(a)p_{\alpha_2,\beta_2,q^{m_2}(\overline{r}+\varepsilon)}^{(m_2,r)}(b)$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $(\overline{r}+\varepsilon < q^{-m_2}r)$. Теорема доказана. □

Из теоремы 6.6 следует, что операторы $a(x,\xi,\Lambda)$ образуют алгебру (которая в отличие от предыдущего уже не является банаховой). Центральное место этого пункта — доказательство теоремы обращения 6.7. Нам понадобится следующий общий результат.

Пусть $\mathcal{B}$ — банахова алгебра, $g \in \mathcal{B}$, а $\rho(g) = \lim\limits_{n\to\infty}\|g^n\|^{1/n}$ — спектральный радиус элемента g ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}}$). Хорошо известна непрерывность сверху спектрального радиуса:

$$\|g_n - g\| \to 0 \implies \limsup_{n\to\infty}\rho(g_n) \leqslant \rho(g).$$

Лемма 6.4. *Если* $\|g_n - g\|_{\mathcal{B}} \leqslant ch^n$ *для некоторых* $c > 0$, $0 < h < 1$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\|g_n g_{n-1}\dots g_1\|_{\mathcal{B}}^{1/n} \leqslant \rho(g),$$

где $\rho(g)$ *обозначает спектральный радиус элемента* g *в* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Обозначим

$$g_n - g = \Delta g_n, \quad g_n g_{n-1} \dots g_1 - g^n = \Delta_n.$$

Оценим $\|\Delta_n\|$ (здесь и далее в доказательстве $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}}$). Разность $\Delta_n = (g + \Delta g_n)(g + \Delta g_{n-1}) \dots (g + \Delta g_1) - g^n$ сгруппируем в n сумм $\Delta_{n,m}$ $(m = 1, \dots, n)$ так, что в $\Delta_{n,m}$ в каждом слагаемом m сомножителей составляют Δg_i:

$$\Delta_n = \sum_{m=1}^{n} \Delta_{n,m}, \qquad \Delta_{n,m} = \sum_{i_1=m}^{n} g^{n-i_1}(\Delta g_{i_1}) \sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} g^{i_1-1-i_2}(\Delta g_{i_2}) \times \dots$$

$$\dots \times \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} g^{i_{m-1}-1-i_m}(\Delta g_{i_m}) g^{i_m-1}.$$

Из формулы спектрального радиуса следует, что $\|g^k\| \leqslant M(r) r^{k+1}$ для произвольного $r > \rho(g)$ (при этом можно взять $M(r) = \max\limits_{|\lambda|=r} \|g - \lambda e\|$). Приходим к неравенству

$$\|g^{n-i_1}\| \, \|g^{i_1-1-i_2}\| \times \dots \times \|g^{i_{m-1}-1-i_m}\| \, \|g^{i_m-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant [M(r)]^{m+1} r^{n-i_1+1+i_1-1-i_2+1+\dots+i_{m-1}-1-i_m+1+i_m-1+1} = [M(r)]^{m+1} r^{n+1}.$$

Отсюда и из условия леммы получаем

$$\|\Delta_{n,m}\| \leqslant [M(r)]^{m+1} r^{n+1} c^m \sum_{i_1=m}^{n} \sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} \dots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} h^{i_1+i_2+\dots+i_m}.$$

Последняя сумма оценивается непосредственно:

$$\sum_{i_1=m}^{n} \sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} \dots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} h^{i_1+i_2+\dots+i_m} \leqslant \sum_{i_1=m}^{\infty} h^{i_1} \sum_{i_2=m-1}^{\infty} h^{i_2} \dots h^{i_{m-1}} \sum_{i_m=1}^{\infty} h^{i_m} =$$

$$= \frac{h^{m(m+1)/2}}{(1-h)^m}.$$

Таким образом,

$$\|\Delta_{n,m}\| \leqslant \left[\frac{cM(r)h^{(m+1)/2}}{1-h}\right]^m M(r) r^{n+1},$$

$$\|\Delta_n\| \leqslant \sum_{m=1}^{n} \|\Delta_{n,m}\| \leqslant M(r) r^{n+1} \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{cM(r)h^{(m+1)/2}}{1-h}\right]^m.$$

Но последовательность $\left[\frac{cM(r)h^{(m+1)/2}}{1-h}\right]^m$ мажорируется убывающей геометрической прогрессией, так что $\|\Delta_n\| \leqslant M_1(r)r^n$. Окончательно

$$\|g_n g_{n-1}\dots g_1\| = \|g^n + \Delta_n\| \leqslant \|g^n\| + \|\Delta_n\| \leqslant M_2(r)r^n. \qquad (6.23)$$

Отсюда следует, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \|g_n g_{n-1}\dots g_1\|^{1/n} \leqslant r$. Но $r > \rho(g)$ произвольно и лемма доказана. □

Замечание 6.1. Из доказательства леммы 6.4 видно, что постоянная $M_2(r)$ зависит (помимо r) лишь от предельного элемента g и параметров c, h в оценке сходимости, но не зависит от начального элемента последовательности. Поэтому с той же постоянной верно неравенство

$$\|g_{j+n}g_{j+n-1}\dots g_{j+1}\| \leqslant M_2(r)r^n$$

для любых натуральных n и j.

Теорема 6.7. *Пусть* $a(x,\xi,\lambda) = 1 + \sum\limits_{j=1}^{l} a_j(x,\xi)\lambda^j \quad (\lambda \in \mathbb{C};\ a_j \in S^0)$ *и выполнены следующие условия:*

$$a_j(x,t\xi) = a_j(x,\xi) \quad (t \geqslant 1,\ |\xi| \geqslant 1);$$

$$\operatorname{supp} a_j \subset K \times \left\{|\xi| \geqslant q^{-1}\right\} \ \ \textit{для некоторого компакта} \ \ K \subset \mathbb{R}^n.$$

Если $a(0,\xi,\lambda) \neq 0$ *при* $|\xi| = 1$, $|\lambda| < r$, *то существует обратный оператор* $[a(x,\xi,\Lambda)]^{-1}$ *с символом* $b(x,\xi,\lambda)$ *класса* $(0,r)$, *причем* $b(x,\xi,0) = 1$ *и*

$$\operatorname{supp} b^{(k)}(x,\xi,0) \subset K \times \left\{|\xi| \geqslant q^{-1}\right\} \quad (k = 1,2,\dots).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (6.22) композиции для построения оператора $b(x,\xi,\Lambda)$, обратного к $a(x,\xi,\Lambda)$.

Равенство $a(x,\xi,\Lambda)b(x,\xi,\Lambda) = I$ приводит к системе

$$\begin{cases} b_0(x,\xi) = 1, \\ b_k(x,\xi) = -\sum\limits_{j=1}^{\min(k,l)} a_j(x,\xi) b_{k-j}(q^{-j}x, q^j\xi) \quad (k = 1,2,\dots). \end{cases} \qquad (6.24)$$

Равенство $b(x,\xi,\Lambda)a(x,\xi,\Lambda)=I$ дает

$$\begin{cases} b_0(x,\xi)=1, \\ b_m(x)=-\sum\limits_{j=1}^{\min(k,l)} a_j(q^{j-k}x,q^{k-j}\xi)b_{k-j}(x,\xi) \quad (k=1,2,\ldots). \end{cases} \tag{6.25}$$

Покажем, что обе системы определяют одну и ту же последовательность коэффициентов $b_k(x,\xi)$, $k=0,1,\ldots$.

Введем матрицы $A_k(x,\xi)$ порядка $k\times k$ $(k=1,2,\ldots)$:

$$A_k(x,\xi)=\begin{pmatrix} a_1(x,\xi) & a_2(x,\xi) & \ldots & a_{k-1}(x,\xi) & a_k(x,\xi) \\ 1 & a_1(q^{-1}x,q\xi) & \ldots & a_{k-2}(q^{-1}x,q\xi) & a_{k-1}(q^{-1}x,q\xi) \\ 0 & 1 & \ldots & a_{k-3}(q^{-2}x,q^2\xi) & a_{k-2}(q^{-2}x,q^2\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1(q^{1-k}x,q^{k-1}\xi) \end{pmatrix}.$$

Мы утверждаем, что функции $b_k(x,\xi)$ в (6.24) и (6.25) вычисляются по формуле

$$b_k(x,\xi)=(-1)^k\det A_k(x,\xi).$$

Докажем это индукцией по $k=1,2,\ldots$. При $k=1$ равенство очевидно. Предполагая, что оно имеет место для всех номеров вплоть до некоторого k, проверим его и для номера $k+1$.

Раскрывая $\det A_{k+1}(x,\xi)$ по первому столбцу и используя предположение индукции, получим

$$b_{k+1}(x,\xi)=(-1)^{k+1}\det A_{k+1}(x,\xi)=(-1)^{k+1}\Big(a_1(x,\xi)\det A_k(q^{-1}x,q\xi)-$$

$$-a_2(x,\xi)\det A_{k-1}(q^{-2}x,q^2\xi)+\ldots+(-1)^{k-1}a_k(x,\xi)\det A_1(q^{-k}x,q^k\xi)+$$

$$+(-1)^k a_{k+1}(x,\xi)\Big)=-a_1(x,\xi)(-1)^k\det A_k(q^{-1}x,q\xi)-$$

$$-a_2(x,\xi)(-1)^{k-1}\det A_{k-1}(q^{-2}x,q^2\xi)-\ldots-a_k(x,\xi)(-1)\det A_1(q^{-k}x,q^k\xi)-$$

$$-a_{k+1}(x,\xi)=-\sum_{j=1}^{k+1}a_j(x,\xi)b_{k+1-j}(q^{-j}x,q^j\xi),$$

что совпадает с (6.24). Чтобы прийти к (6.25), надо раскрыть $\det A_{k+1}(x)$ по последней строке:

$$b_{k+1}(x) = (-1)^{k+1}\Big(a_1(q^{-k}x, q^k\xi)\det A_k(x,\xi) - a_2(q^{1-k}x, q^{k-1}\xi)\times$$

$$\times \det A_{k-1}(x,\xi) + \ldots + (-1)^{k-1}a_k(q^{-1}x, q\xi)\det A_1(x,\xi) + (-1)^k a_{k+1}(x,\xi)\Big) =$$

$$= -a_1(q^{-k}x, q^k\xi)(-1)^k \det A_k(x,\xi) - a_2(q^{1-k}x, q^{k-1}\xi)(-1)^{k-1}\det A_{k-1}(x,\xi) -$$

$$\ldots - a_k(q^{-1}x, q\xi)(-1)\det A_1(x,\xi) - a_{k+1}(x,\xi) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{k+1} a_j(q^{j-k-1}x, q^{k+1-j}\xi) b_{k+1-j}(x,\xi).$$

Из (6.24) следует, что функции $b_k(x,\xi)$ принадлежат S^0 и

$$\operatorname{supp} b_k(x,\xi) \subset K \times \left\{|\xi| \geqslant q^{-1}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$p^{(0)}_{\alpha\beta}(b_k) = \sup_{x\in K,\, |\xi|\geqslant q^{-1}} (1+|\xi|)^{|\alpha|} \left|D^\alpha_\xi D^\beta_x b_k(x,\xi)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}(r')r'^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6.26}$$

для любого $r' < r$. □

Введем вектор-столбец $B_k = (b_{k+l}, \ldots, b_{k+1})^T$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и матрицу $G(x,\xi)$ порядка $l \times l$:

$$G(x,\xi) = \begin{pmatrix} -a_1(q^{1-l}x, q^{l-1}\xi) & -a_2(q^{2-l}x, q^{l-2}\xi) & \ldots & -a_l(x,\xi) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

В левом нижнем углу расположена единичная матрица порядка $(l-1)\times(l-1)$, а в правом — нулевой столбец длины $l-1$. Заметим, что в силу однородности по ξ коэффициентов a_j, при $|\xi| \geqslant 1$ можно записать

$$G(x,\xi) = \begin{pmatrix} -a_1(q^{1-l}x,\xi) & -a_2(q^{2-l}x,\xi) & \dots & -a_l(x,\xi) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $G_k(x,\xi) = G(q^{-k}x, q^k\xi)$. Тогда $G_k(x,\xi) = G(q^{-k}x, q\xi)$ при $|\xi| \geqslant q^{-1}$. Система (6.25) может быть записана в виде рекуррентных соотношений $B_k = G_k B_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$, или

$$B_k = G_k G_{k-1} \dots G_1 B_0. \tag{6.27}$$

Докажем оценку

$$\sup_{x\in K,\, |\xi|\geqslant q^{-1}} (1+|\xi|)^{|\alpha|} \left\| D_\xi^\alpha D_x^\beta (G_k G_{k-1}\dots G_1)(x,\xi)\right\| \leqslant c_{\alpha\beta}(r') r'^{-k} \tag{6.28}$$

$$(r' < r;\ k = 1, 2, \dots)$$

индукцией по α и β (в (6.28) $\|\cdot\|$ обозначает матричную норму). В силу однородности функций a_j по второму аргументу имеем

$$\sup_{x\in K,\, |\xi|\geqslant q^{-1}} \|G_k G_{k-1}\dots G_1\| = \sup_{x\in K,\, |\eta|\geqslant 1} \left\|G(q^{-k}x,\eta)\dots G(q^{-1}x,\eta)\right\| =$$

$$= \sup_{x\in K,\, |\eta|=1} \left\|G(q^{-k}x,\eta)\dots G(q^{-1}x,\eta)\right\| = \|g_k\dots g_1\|_{\mathcal{B}},$$

где $g_k = G(q^{-k}x,\eta)$ — элементы банаховой алгебры $\mathcal{B}$ непрерывных на компакте $K \times S^{n-1}$ матриц порядка $l\times l$ (здесь S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$).

Если $g = G(0,\eta)$, то, как нетрудно видеть, $\|g_k - g\|_{\mathcal{B}} \leqslant \mathrm{const}\cdot q^{-k}$. Это следует из гладкости коэффициентов по x — достаточно применить дифференциальную теорему о среднем. Пусть $\rho(g)$ обозначает спектральный радиус элемента $g \in \mathcal{B}$. По лемме 6.4,

$$\|g_k\dots g_1\| \leqslant M(\bar r)\bar r^k \quad (\bar r > \rho(g)).$$

Оценим $\rho(g)$. Характеристическое уравнение для определения собственных значений матрицы $G(0,\eta)$ имеет вид

$$z^l + a_1(0,\eta)z^{l-1} + \ldots + a_l(0,\eta) = 0 \tag{6.29}$$

(достаточно раскрыть $\det(G(0,\eta) - zE)$ по первому столбцу). После замены $z = \lambda^{-1}$ уравнение (6.29) примет вид

$$a(0,\eta,\lambda) = 0.$$

По условию теоремы $a(0,\eta,\lambda) \neq 0$ ($|\eta| = 1$, $|\lambda| < r$). Следовательно, все корни $z_j = z_j(\eta)$ уравнения (6.29) таковы, что $|z_j| \leqslant r^{-1}$ ($j = 1,\ldots,l$; $|\eta| = 1$). Поскольку спектр элемента $g \in \mathcal{B}$ есть объединение по всем $\eta \in S^{n-1}$ собственных значений матриц $G(0,\eta)$, отсюда вытекает, что $\rho(g) \leqslant r^{-1}$. Если $r' < r$, то $\overline{r} = r'^{-1} > r^{-1} \geqslant \rho(g)$ и

$$\sup_{x\in K,\,|\xi|\geqslant q^{-1}} \|G_kG_{k-1}\ldots G_1\| = \|g_k\ldots g_1\|_{\mathcal{B}} \leqslant M(r')r'^{-k} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

Таким образом, для $\alpha = \beta = 0$ оценка (6.28) доказана.

Предположим теперь, что оценка (6.28) справедлива для всех мультииндексов $\gamma = (\alpha,\beta)$ таких, что $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leqslant N$. Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}D^{\gamma}_{\xi,x}(G_k\ldots G_1),\ \frac{\partial}{\partial \xi_i}D^{\gamma}_{\xi,x}(G_k\ldots G_1) \quad (|\gamma| = N;\ i = 1,\ldots,n).$$

По формуле Лейбница

$$\frac{\partial}{\partial x_i}D^{\gamma}_{\xi,x}(G_k\ldots G_1) = D^{\gamma}_{\xi,x}\sum_{j=1}^{k} G_k\ldots G_{j+1}\frac{\partial G_j}{\partial x_i}G_{j-1}\ldots G_1 =$$

$$= \sum_{\gamma_2\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma}\binom{\gamma}{\gamma_1}\binom{\gamma_1}{\gamma_2}\sum_{j=1}^{k} D^{\gamma_2}_{\xi,x}(G_k\ldots G_{j+1})\left(D^{\gamma_1-\gamma_2}_{\xi,x}\frac{\partial G_j}{\partial x_i}\right)D^{\gamma-\gamma_1}_{\xi,x}(G_{j-1}\ldots G_1).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}D^{\gamma}_{\xi,x}(G_k\ldots G_1) =$$

$$= \sum_{\gamma_2\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma}\binom{\gamma}{\gamma_1}\binom{\gamma_1}{\gamma_2}\sum_{j=1}^{k} D^{\gamma_2}_{\xi,x}(G_k\ldots G_{j+1})\left(D^{\gamma_1-\gamma_2}_{\xi,x}\frac{\partial G_j}{\partial \xi_i}\right)D^{\gamma-\gamma_1}_{\xi,x}(G_{j-1}\ldots G_1).$$

Заметим, что для любого мультииндекса $\gamma = (\alpha, \beta)$ найдется константа $M = M(\gamma)$ такая, что

$$\left\| D^{\gamma}_{\xi,x} G_j(x,\xi) \right\| \leqslant M(1+|\xi|)^{-|\alpha|} \quad (j = 1, 2, \ldots;\ |\xi| \geqslant q^{-1},\ x \in K).$$

Отсюда с учетом предположения индукции и замечания 6.1 вытекает, что при $x \in K$, $|\xi| \geqslant q^{-1}$, $r' < r$ справедлива оценка

$$\left\| (1+|\xi|)^{|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\gamma}_{\xi,x}(G_k \ldots G_1) \right\| \leqslant \sum_{\gamma_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma} \sum_{j=1}^{k} \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_2|} D^{\gamma_2}_{\xi,x}(G_k \ldots G_{j+1}) \right\| \times$$

$$\times \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_1-\alpha_2|} D^{\gamma_1-\gamma_2}_{\xi,x} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right\| \cdot \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha-\alpha_1|} D^{\gamma-\gamma_1}_{\xi,x}(G_{j-1} \ldots G_1) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{\gamma_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma} \sum_{j=1}^{k} c_{\gamma_2}(r') r'^{j-k} M c_{\gamma-\gamma_1}(r') r'^{1-j} \leqslant c_1 k r'^{-k} \leqslant c_2(\gamma, r') r'^{-k}.$$

Аналогично

$$\left\| (1+|\xi|)^{|\alpha|+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} D^{\gamma}_{\xi,x}(G_k \ldots G_1) \right\| \leqslant c_3(\gamma, r') r'^{-k}.$$

Оценка (6.28) доказана. Из (6.27), (6.28) следует, что

$$(1+|\xi|)^{|\alpha|} \left| D^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} B_k(x,\xi) \right| \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1 \leqslant \alpha \\ \beta_1 \leqslant \beta}} \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_1|} D^{\alpha_1}_{\xi} D^{\beta_1}_{x} (G_k \ldots G_1)(x,\xi) \right\| \times$$

$$\times \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_2|} D^{\alpha_2}_{\xi} D^{\beta_2}_{x} B_0(x,\xi) \right\| \leqslant c_{\alpha\beta}(r') r'^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

при $x \in K$, $|\xi| \geqslant q^{-1}$, $r' < r$. Получили (6.26). Теорема доказана.

6.5. Псевдодифференциальные операторы со сжатиями аргументов

Каждому символу $a(x,\xi)$, $a \in S^m$, отвечает непрерывный оператор

$$Op(a) = A(x, D) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

в пространстве Шварца быстро убывающих функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$A(x, D)u = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x, \xi) \widetilde{u}(\xi)\, d\xi,$$

где $\widetilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$. Оператор $A(x, D)$ называется псевдодифференциальным оператором порядка m. Как известно, такой оператор продолжается до непрерывного оператора в соболевских пространствах

$$A(x, D) : W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n) \to W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(см., например, [33, теоремы 18.1.11, 18.1.13]). Кроме того, из доказательства упомянутых теорем видно, что соответствующая норма оператора A оценивается суммой конечного числа полунорм символа a:

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right)} \leqslant \mathrm{const} \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}^{(m)}(a). \tag{6.30}$$

Другими словами, отображение

$$S^m \ni a \longrightarrow A \in \mathcal{L}\left(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right)$$

также непрерывно.

Для банаховых пространств X, Y через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначается банахово пространство линейных ограниченных операторов из X в Y, а через $\mathcal{K}(X, Y)$ — подпространство пространства $\mathcal{L}(X, Y)$, состоящее из компактных операторов.

Далее, если $a \in S^{m_1}$, $b \in S^{m_2}$, то композиция $A(x, D)B(x, D)$ есть псевдодифференциальный оператор с символом $\sigma(AB) \in S^{m_1+m_2}$, допускающим асимптотическое разложение

$$\sigma(AB) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi) D\alpha_x b(x, \xi)$$

([33, Теорема 18.1.8]). Это означает, что для любого $N = 0, 1, \ldots$ остаточный член $\sigma(AB) - \sum\limits_{|\alpha|<N} (\alpha!)^{-1} D_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi) D\alpha_x b(x, \xi)$ принадлежит

$S^{m_1+m_2-N}$. Кроме того, в ходе доказательства Теоремы 18.1.8 выводится также непрерывность билинейного отображения

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \ni (a,b) \longrightarrow \sigma(AB) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}(D_\xi^\alpha a)(D_x^\alpha b) \in S^{m_1+m_2-N}.$$

Показано, что всякая полунорма остаточного члена в $S^{m_1+m_2-N}$ оценивается некоторой конечной суммой произведений полунорм функции a в S^{m_1} на полунормы функции b в S^{m_2}:

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2-N)}\left(\sigma(AB) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}(D_\xi^\alpha a)(D_x^\alpha b)\right) \leqslant \mathrm{const} \sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1\\ \alpha_2,\beta_2}} p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_1)}(a) p_{\alpha_2\beta_2}^{(m_2)}(b) \tag{6.31}$$

(сумма в правой части содержит конечное число членов).

В случае, когда $a(x,\xi) = a(x)$, имеем $\sigma(AB) = a(x)b(x,\xi)$, а если $b(x,\xi) = b(\xi)$, то $\sigma(AB) = a(x,\xi)b(\xi)$.

Пусть R снова обозначает функциональный оператор, соответствующий сжатию пространственной переменной x, введенный в пункте 6.1. Нетрудно видеть, что

$$\|R^k\|_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))} = \|R\|^k_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))} = q^{kn/2} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Кроме того, для всякого псевдодифференциального оператора легко проверяется следующее соотношение:

$$RA(x,D) = A(q^{-1}x, qD)R, \tag{6.32}$$

где $A(q^{-1}x, qD)R$ есть оператор с символом $a(q^{-1}x, q\xi)$.

Теорема 6.8. *Пусть $a(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m,r). Тогда формулой*

$$A(x,D,R)u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Op\left(a^{(k)}(x,\xi,0)\right) R^k u \tag{6.33}$$

определен ограниченный оператор

$$A(x,D,R) : W_2^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$$

для всех $\mu > \log_q r$.

Доказательство. Пусть $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция:

$$\chi(\xi) = 0 \text{ при } |\xi| \leqslant \varepsilon, \quad \chi(\xi) = 1 \text{ при } |\xi| \geqslant C_0,$$

где C_0 — константа из (6.18). Тогда, учитывая поведение коэффициентов $a_k(x,\xi) = (k!)^{-1}a^{(k)}(x,\xi,0)$ при малых ξ (условия (6.18)), оператор $A_k(x,D)$ можно разложить в произведение $A_k(x,D) = A_{k,1}(x,D)A_{k,2}(D)$,

$$a_{k,1}(x,\xi) = a_k(x,\xi)|q^k\xi|^{-\mu}, \quad a_{k,2}(x,\xi) = \chi(\xi)|q^k\xi|^{\mu}.$$

Очевидно, $a_{k,1} \in S^{m-\mu}$, $a_{k,2} \in S^\mu$. Представим k-й член ряда (6.33) в виде $A_k(x,D)R^k = A_{k,1}(x,D)R^kA_{k,2}(q^{-k}D)$. Понятно, что отображение $a(x,\xi) \mapsto |\xi|^{-\mu}a(x,\xi)$ из S^m в $S^{m-\mu}$ непрерывно на подпространстве символов, обращающихся в ноль при $|\xi| \leqslant C_0$. Поэтому

$$p^{(m-\mu)}_{\alpha\beta}(a_{k,1}) \leqslant \mathrm{const}\cdot q^{-\mu k}\sum_{\alpha_1,\beta_1} p^{(m)}_{\alpha_1\beta_1}(a_k) \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{\alpha_1,\beta_1} p^{(m,r)}_{\alpha_1\beta_1 r'}(a)\right)(q^\mu r')^{-k}$$

для всех $r' < r$ и $k = 0,1,\ldots$. Принимая во внимание (6.30), будем иметь

$$\|A_{k,1}\|_{\mathcal{L}\left(L_2(\mathbb{R}^n);\, W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right)} \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{\alpha,\beta} p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a)\right)(q^\mu r')^{-k}.$$

Очевидно также, что последовательность $a_{k,2}(q^{-k}\xi) = \chi(q^{-k}\xi)|\xi|^\mu$ ограничена в S^μ. Поэтому

$$\|A_{k,2}(q^{-k}D)\|_{\mathcal{L}(W_2^\mu(\mathbb{R}^n);\, L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant \mathrm{const} \quad (k = 0,1,\ldots).$$

Таким образом,

$$\|A_kR^k\|_{\mathcal{L}\left(W_2^\mu(\mathbb{R}^n);\, W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right)} \leqslant \|A_{k,1}\|_{\mathcal{L}\left(L_2(\mathbb{R}^n);\, W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right)}\|R^k\|_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))}\times$$

$$\times\|A_{k,2}(q^{-k}D)\|_{\mathcal{L}(W_2^\mu(\mathbb{R}^n);\, L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{\alpha,\beta} p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a)\right)\left(\frac{q^{n/2-\mu}}{r'}\right).$$

Если $r > q^{n/2-\mu}$, то можно взять $r' > q^{n/2-\mu}$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(x,D)R^k$ сходится по операторной норме и справедлива оценка

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right)} \leqslant \mathrm{const} \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta r'}^{(m,r)}(a) \quad (q^{n/2-\mu} < r' < r).$$

Теорема доказана. $\square$

Заметим, что мы установили также непрерывность отображения

$$\mathcal{H}(\Omega_r, S^m) \ni a \longrightarrow A \in \mathcal{L}\left(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Если $a(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m,r), то оператор $A(x,D,R)$ из теоремы 6.8 будем называть псевдодифференциальным оператором со сжатием аргументов (класса (m,r)).

Для символов $a \in S^{m_1}$, $a(x,\xi) = 0$ при $|\xi| \leqslant C_0$, $b \in S^{m_2}$, $b(x,\xi) = 0$ при $|\xi| \leqslant C_0$, символ произведения операторов $A(x,D)B(x,D)$ этому условию, вообще говоря, не удовлетворяет. Поэтому мы будем рассматривать операторы (6.33) и для произвольных функций $a \in \mathcal{H}(\Omega_r, S^m)$.

Теорема 6.9. *Если $a \in \mathcal{H}(\Omega_r, S^m)$ и $r > q^{n/2}$, то ряд* (6.33) *задает ограниченный оператор*

$$A(x,D,R) : W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$$

для всех $\mu \geqslant 0$.

Доказательство.

1. В случае $\mu = 0$, аналогично теореме 6.8,

$$\|A_k R^k\|_{\mathcal{L}\left(L_2(\mathbb{R}^n);\, W_2^{-m}(\mathbb{R}^n)\right)} \leqslant \|A_k\|_{\mathcal{L}\left(L_2(\mathbb{R}^n);\, W_2^{-m}(\mathbb{R}^n)\right)} \|R^k\|_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \left(\sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta r'}^{(m,r)}(a) \right) \left(\frac{q^{n/2}}{r'} \right),$$

откуда следует, что

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(L_2(\mathbb{R}^n);\, W_2^{-m}(\mathbb{R}^n)\right)} \leqslant \mathrm{const} \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta r'}^{(m,r)}(a)$$

для r' из интервала $q^{n/2} < r' < r$.

2. В случае натурального μ, в силу теоремы о замкнутом графике, достаточно показать, что $Au \in W^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$, если $u \in W^{\mu}(\mathbb{R}^n)$. Пусть α — мультииндекс, $|\alpha| \leqslant \mu$. По формуле Лейбница

$$D^{\alpha} A_k(x, D)u = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} A_{k,\alpha-\beta}(x, D) D^{\beta} u,$$

где $A_{k,\alpha-\beta}(x, D) = Op\left(D_x^{\alpha-\beta} a(x, \xi)\right)$. Тогда

$$D^{\alpha} A(x, D, R)u = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,\alpha-\beta}(x, D) D^{\beta}(R^k u) =$$

$$= \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,\alpha-\beta}(x, D)(q^{-|\beta|}R)^k D^{\beta} u = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} A_{\alpha-\beta}(x, D, q^{-|\beta|}R) D^{\beta} u.$$

Заметим, что если $a \in \mathcal{H}(\Omega_r, S^m)$, то функция $D_{\xi}^{\gamma_1} D_x^{\gamma_2} a(x, \xi, t^{-1}\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(\Omega_{tr}, S^{m-|\gamma_1|})$ для любых мультииндексов γ_1, γ_2 и любого $t > 0$.

Ограниченность операторов $A_{\alpha-\beta}(x, D, q^{-|\beta|}R) : L_2(\mathbb{R}^n) \to W_2^{-m}(\mathbb{R}^n)$ уже доказана. А так как $D^{\beta} u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ при $\beta \leqslant \alpha$, мы получили, что $D^{\alpha} Au \in W_2^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $Au \in W_2^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$.

3. Интерполяция между нулем и натуральным μ завершает доказательство теоремы. $\square$

Следующая задача — вывести формулу композиции псевдодифференциальных операторов со сжатием аргументов. Ограничимся случаем, когда один из сомножителей — полином относительно R.

Лемма 6.5. *Пусть $a(x, \xi, \lambda)$ — полином относительно λ с коэффициентами из S^{m_1}, удовлетворяющий условию* (6.18)*; $b(x, \xi, \lambda)$ — символ класса (m_2, r); $c(x, \xi, \lambda)$ — символ класса $(m_1 + m_2, r)$, отвечающий произведению*

$$c(x, \xi, \Lambda) = a(x, \xi, \Lambda) b(x, \xi, \Lambda).$$

Если $r > q^{n/2}$, то

$$A(x,D,R)B(x,D,R) - C(x,D,R) \in \mathcal{L}\left(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, W^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)\right)$$

для всех $\mu \geqslant 0$.

Доказательство. Перемножая ряды и пользуясь формулой композиции ПДО, будем иметь ($A_j = 0$ при $j > l$):

$$A(x,D,R)B(x,D,R) = \left(\sum_{k=0}^{l} A_k(x,D)R^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x,D)R^k\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} A_j(x,D)B_{k-j}(q^{-j}x, q^jD)\right)R^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x,D)R^k + \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x,D)R^k,$$

где $C_k(x,D) \in Op\left(S^{m_1+m_2}\right)$ — оператор с символом (см. (6.22))

$$c_k(x,\xi) = \frac{1}{k!}\,c^{(k)}(x,\xi,0) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x,\xi)b_{k-j}(q^{-j}x, q^j\xi),$$

$$E_k(x,D) = \sum_{j=0}^{k} A_j(x,D)B_{k-j}(q^{-j}x, q^jD) - C_k(x,D) \in Op\left(S^{m_1+m_2-1}\right).$$

В силу (6.31)

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2-1)}(e_k) \leqslant \mathrm{const}\sum_{j=0}^{l}\sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1\\ \alpha_2,\beta_2}} p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_1)}(a_j)p_{\alpha_2\beta_2}^{(m_2)}(\Lambda^j b_{k-j}) \leqslant c_{\alpha\beta}(r')r'^{-k} \quad (r' < r).$$

Следовательно, функция $e(x,\xi,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e_k(x,\xi)\lambda^k$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(\Omega_r, S^{m_1+m_2-1})$ и

$$A(x,D,R)B(x,D,R) = C(x,D,R) + E(x,D,R).$$

Но при $r > q^{n/2}$ по теореме 6.9 оператор

$$E(x,D,R) : W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n) \to W_2^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)$$

ограничен для всех $\mu \geqslant 0$. Лемма доказана. □

Лемма 6.6. *Пусть $a(x,\xi,\lambda)$ — полином относительно λ с коэффициентами из S^{m_1}, удовлетворяющий условию (6.18), причем $a_k(x,\xi) =$*

$a_{k,1}(x)a_{k,2}(\xi)$ $(k = 0, \dots, l)$; $b(x, \xi, \lambda)$ — символ класса (m_2, r); $c(x, \xi, \lambda)$ — символ класса $(m_1 + m_2, q^{-m_1}r)$, отвечающий произведению

$$c(x, \xi, \Lambda) = b(x, \xi, \Lambda)a(x, \xi, \Lambda).$$

Если $r > q^{n/2}$, то

$$B(x, D, R)A(x, D, R) - C(x, D, R) \in \mathcal{L}\left(W_2^\mu(\mathbb{R}^n);\; W^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)\right)$$

для всех $\mu \geqslant m_1$.

Доказательство. Действуя аналогично лемме 6.5, получим ($A_j = 0$ при $j > l$):

$$B(x, D, R)A(x, D, R) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x, D)R^k\right)\left(\sum_{k=0}^{l} A_k(x, D)R^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} B_{k-j}(x, D)A_{j,1}(q^{j-k}x)A_{j,2}(q^{k-j}D)\right)R^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x, D)R^k + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} F_{kj}(x, D)A_{j,2}(q^{k-j}D)R^k,$$

где

$$F_{kj}(x, D) = B_{k-j}(x, D)A_{j,1}(q^{j-k}x) - Op\left(b_{k-j}(x, \xi)a_{j,1}(q^{j-k}x)\right) \in Op\left(S^{m_2-1}\right)$$

и $F_{kj} = 0$ при $j > l$. В силу (6.31)

$$p_{\alpha\beta}^{(m_2-1)}(f_{kj}) \leqslant \mathrm{const}\sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1\\ \alpha_2,\beta_2}} p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_2)}(b_{k-j})p_{\alpha_2\beta_2}^{(0)}(\Lambda^{k-j}a_{j,1}) \leqslant c_{\alpha\beta}(r')r'^{-k}$$

$$(r' < r;\; j = 0, \dots, l;\; k \geqslant j),$$

поскольку семейство символов $a_{j,1}(q^{j-k}x)$ $(j = 0, \dots, l;\; k \geqslant j)$ ограничено в S^0.

Меняя местами порядок суммирования, получим

$$B(x, D, R)A(x, D, R) - C(x, D, R) =$$

$$= \sum_{j=0}^{l}\left(\sum_{k=j}^{\infty} F_{kj}(x, D)R^k\right)A_{j,2}(q^{-j}D) = \sum_{j=0}^{l} F_j(x, D, R)A_{j,2}(q^{-j}D),$$

$$f_j(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=j}^{\infty} f_{kj}(x,\xi)\lambda^k, \quad f_j\in\mathcal{H}(\Omega_r,S^{m_2-1}).$$

Остается заметить, что по теореме 6.9 все операторы

$$F_j(x,D,R): W_2^{\mu-m_1}(\mathbb{R}^n)\to W_2^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)$$

ограничены для всех $\mu\geqslant m_1$. Лемма доказана. $\square$

Перейдем теперь к операторам, действующим на функции в ограниченной области. Рассмотрим ограниченную область $Q\in\mathbb{R}^n$, $\partial Q\in C^\infty$, удовлетворяющую условию (6.3). Пусть $K\subset qQ$ — фиксированный компакт, а $\varphi\in\dot{C}^\infty(Q)$ — срезающая функция такая, что $\varphi(x)=1$ при $x\in q^{-1}K$.

Если функция $a\in\mathcal{H}(\Omega_r,S^m)$ является полиномом по ξ, то $A_k(x,D)=(k!)^{-1}\,Op\left(a^{(k)}(x,\xi,0)\right)$ — дифференциальные операторы и формула (6.33) при $r>q^{n/2}$ задает также ограниченный оператор

$$A(x,D,R): W_2^{\mu}(Q)\to W_2^{\mu-m}(Q)\quad (\mu\geqslant 0)$$

для всякой области Q, удовлетворяющей (6.3). Если при этом коэффициенты операторов $A_k(x,D)$ финитны в K, то

$$A(x,D,R)u=A_0(x,D)u+\sum_{k=1}^{\infty} r^+A_k(x,D)R^k(\varphi u). \tag{6.34}$$

В (6.34) операторы $A_k(x,D)$, начиная с $k=1$, действуют на функции в $\mathbb{R}^n$; r^+ — оператор сужения на Q. Воспользуемся этим соображением, чтобы определить операторы в ограниченной области для более общих символов.

Итак, пусть $a(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m,r), для которого

$$a(x,\xi,0) \text{ — полином относительно } \xi; \tag{6.35}$$

$$\operatorname{supp} a^{(k)}(x,\xi,0)\subset K\times\{|\xi|\geqslant C_0\}\quad (k=1,2,\ldots). \tag{6.36}$$

Тогда правой частью равенства (6.34) корректно определен оператор из $W_2^{\mu}(Q)$ в $W_2^{\mu-m}(Q)$, который мы будем обозначать $r^+A(x,D,R)$, в отличие от оператора $A(x,D,R)$, действующего в $\mathbb{R}^n$. Здесь $\mu > n/2 - \log_q r$.

Для символов $a(x,\xi,\lambda)$ класса (m_1,r), $b(x,\xi,\lambda)$ класса (m_2,r), удовлетворяющих условиям (6.35), (6.36), рассмотрим композицию

$$r^+A(x,D,R)r^+B(x,D,R) = (A_0 + r^+(A-A_0)\varphi)(B_0 + r^+(B-B_0)\varphi).$$

В силу очевидных соотношений

$$A_0 r^+(B-B_0)\varphi = r^+[A_0(B-B_0)]\varphi,$$

$$r^+(A-A_0)\varphi r^+(B-B_0)\varphi = r^+[(A-A_0)\varphi(B-B_0)]\varphi,$$

будем иметь

$$r^+Ar^+B = A_0B_0 + r^+(A-A_0)(\varphi B_0) + r^+\left[A_0(B-B_0) + (A-A_0)\varphi(B-B_0)\right]\varphi.$$

Очевидно, $\varphi(x)B_0(x,D) = B_0(x,D)\varphi(x) + \widetilde{B}_0(x,D)$, где $\widetilde{B}_0(x,D)$ есть дифференциальный оператор порядка m_2-1 с финитными в Q коэффициентами. Далее,

$$(A(x,D,R) - A_0(x,D))\,\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x,D)\varphi(q^{-k}x)R^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x,D)R^k + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{A}_k(x,D)R^k = A - A_0 + \widetilde{A},$$

где $\widetilde{A}_k(x,D) = A_k(x,D)\varphi(q^{-k}x) - A_k(x,D) \in Op\left(S^{m_1-1}\right)$, причем

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1-1)}(\widetilde{a}_k) \leqslant \mathrm{const} \sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1\\ \alpha_2,\beta_2}} p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_1)}(a_k)p_{\alpha_2\beta_2}^{(0)}(\varphi(q^{-k}x)) \leqslant c_{\alpha\beta}(r')r'^{-k} \quad (r' < r),$$

поскольку семейство символов $\varphi(q^{-k}x)$ $(k = 1,2,\ldots)$ ограничено в S^0. Таким образом, функция $\widetilde{a}(x,\xi,\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{a}_k(x,\xi)\lambda^k$ лежит в $\mathcal{H}(\Omega_r, S^{m_1-1})$.

В результате получим

$$r^+Ar^+B = A_0B_0 + r^+\left[(A-A_0)B_0 + A_0(B-B_0) + (A-A_0)(B-B_0)\right]\varphi +$$

$$+ r^+(A-A_0)\widetilde{B}_0 + r^+\widetilde{A}(B-B_0)\varphi,$$

или

$$r^+A(x,D,R)r^+B(x,D,R) = A_0(x,D)B_0(x,D)+$$

$$+r^+\left[A(x,D,R)B(x,D,R) - A_0(x,D)B_0(x,D)\right]\varphi(x)+$$

$$+r^+\left[A(x,D,R) - A_0(x,D)\right]\widetilde{B}_0(x,D)+$$

$$r^+\widetilde{A}(x,D,R)\left[B(x,D,R) - B_0(x,D)\right]\varphi(x).$$

Из полученного соотношения и теорем 6.8, 6.9 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.7. *Пусть символы $a(x,\xi,\lambda)$, $b(x,\xi,\lambda)$ принадлежат классам (m_1,r), (m_2,r) соответственно и удовлетворяют условиям* (6.35), (6.36). *Если $r > q^{n/2}$, то для всех $\mu \in [m_2,\, +\infty) \cap (n/2 - \log_q r,\, +\infty)$ оператор*

$$r^+A(x,D,R)r^+B(x,D,R) - A_0(x,D)B_0(x,D)-$$

$$-r^+\left[A(x,D,R)B(x,D,R) - A_0(x,D)B_0(x,D)\right]\varphi(x)$$

ограничен из $W_2^{\mu}(Q)$ в $W_2^{\mu-(m_1+m_2)+1}(Q)$.

Действительно, следующие операторы:

$$\widetilde{B}_0(x,D) : W_2^{\mu}(Q) \to W_2^{\mu-m_2+1}(\mathbb{R}^n) \quad (\mu \in \mathbb{R}),$$

$$r^+[A(x,D,R) - A_0(x,D)] : W_2^{\mu-m_2+1}(\mathbb{R}^n) \to W_2^{\mu-(m_1+m_2)+1}(Q)$$

$$(\mu - m_2 + 1 > n/2 - \log_q r),$$

$$[B(x,D,R) - B_0(x,D)]\varphi : W_2^{\mu}(Q) \to W_2^{\mu-m_2}(\mathbb{R}^n) \quad (\mu > n/2 - \log_q r),$$

$$r^+\widetilde{A}(x,D,R) : W_2^{\mu-m_2}(\mathbb{R}^n) \to W_2^{\mu-(m_1+m_2)+1}(Q) \quad (\mu \geqslant m_2)$$

ограничены.

6.6. Фредгольмова разрешимость краевой задачи

В ограниченной области $Q \in \mathbb{R}^n$, $\partial Q \in C^\infty$, удовлетворяющей условию (6.3), рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \sum_{j=0}^{l} \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_{j\alpha}(x) D^\alpha(u(q^{-j}x)) = f(x) \quad (x \in Q) \tag{6.37}$$

с бесконечно гладкими в $\overline{Q}$ комплекснозначными коэффициентами. Не умаляя общности, можно считать, что $a_{j\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} a_{j\alpha} \subset K$ для некоторого компакта $K \subset qQ$.

Уравнению (6.37) соответствует ограниченный оператор в соболевских пространствах

$$A : W_2^{s+2m}(Q) \to W_2^s(Q).$$

Будем рассматривать уравнение (6.37) в предположении, что дифференциальный оператор $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} a_{0\alpha}(x) D^\alpha$ (локальная часть оператора A) правильно эллиптичен. Таким образом,

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha}(x)\xi^\alpha \neq 0 \quad (x \in \overline{Q};\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Пусть $\chi(\xi)$ — срезающая функция:

$$\chi(\xi) = 0 \text{ при } |\xi| \leqslant q^{-1}, \quad \chi(\xi) = 1 \text{ при } |\xi| \geqslant 1.$$

Введем обозначения

$$a_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_{j\alpha}(x)\xi^\alpha \quad (j = 0, \dots, l);$$

$$a_j'(x,\xi) = a_j(x,\xi)\chi(\xi), \quad a_j''(x,\xi) = \frac{a_j'(x,\xi)}{a_0(q^{-j}x, q^j\xi)} \quad (j = 1, \dots, l);$$

$$a(x,\xi,\lambda) = \sum_{j=0}^{l} a_j(x,\xi)\lambda^j,$$

$$a'(x,\xi,\lambda) = a_0(x,\xi) + \sum_{j=1}^{l} a_j'(x,\xi)\lambda^j, \quad a''(x,\xi,\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{l} a_j''(x,\xi)\lambda^j.$$

Символы $a'(x,\xi,\lambda)$, $a''(x,\xi,\lambda)$ связаны соотношением

$$a'(x,\xi,\Lambda) = a''(x,\xi,\Lambda)a_0(x,\xi). \tag{6.38}$$

Соответствующие символам операторы будем, как обычно, обозначать прописными буквами:

$$A_j(x,D),\ A'_j(x,D),\ A''_j(x,D),\ A(x,D,R),\ A'(x,D,R),\ A''(x,D,R).$$

Поскольку $1-\chi \in S^{-\infty}$, оператор

$$r^+A(x,D,R) - r^+A'(x,D,R) = r^+\left[\sum_{j=1}^{l} A_j(x,D)(1-\chi(D))R^j\right]\varphi$$

сглаживающий. По теореме Реллиха—Гординга,

$$A - r^+A'(x,D,R) \in \mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\, W_2^s(Q)\right) \quad (s\in\mathbb{R}) \tag{6.39}$$

(в разность вошли также и младшие члены уравнения (6.37)). Из (6.38), формулы композиции ПДО и теоремы Реллиха—Гординга следует, что

$$r^+A'(x,D,R) - r^+A''(x,D,R)A_0(x,D) \in \mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\, W_2^s(Q)\right),$$

а значит, и

$$A - r^+A''(x,D,R)A_0(x,D) \in \mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\, W_2^s(Q)\right) \quad (s\in\mathbb{R}). \tag{6.40}$$

Рассмотрим также систему граничных условий

$$T_j(x,D)u(x) = g_j(x) \quad (j=1,\dots,m;\ x\in\partial Q), \tag{6.41}$$

где $T_j(x,D)$ — дифференциальные операторы порядка m_j с гладкими коэффициентами. Будем считать, что операторы $T_j(x,D)$ $(j=1,\dots,m)$ удовлетворяют на ∂Q условию Лопатинского относительно правильно эллиптического оператора $A_0(x,D)$, так что локальная часть уравнения (6.37) с краевыми условиями (6.41) образуют эллиптическую краевую задачу. Тогда для любого $s \geqslant 0$ ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_0 = [A_0, T] = [A_0, T_1, \dots, T_m] :$$

$$W_2^{s+2m}(Q) \longrightarrow \mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q) = W_2^s(Q) \times \prod_{j=1}^{m} W_2^{s+2m-m_j-1/2}(\partial Q)$$

фредгольмов (см., например, [10]). Через

$$\mathcal{P}_0 : \mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q) \to W_2^{s+2m}(Q)$$

обозначим его регуляризатор.

Напомним, что оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ (X и Y — банаховы пространства) называется фредгольмовым, если его ядро $\mathcal{N}(T)$ конечномерно, а образ $\mathcal{R}(T)$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Фредгольмовость оператора T равносильна существованию таких операторов $P_1, P_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$, называемых левым и правым регуляризаторами, что $P_1T - I \in \mathcal{K}(X,X)$ и $TP_2 - I \in \mathcal{K}(Y,Y)$. Если оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ имеет левый и правый регуляризаторы, то любой правый регуляризатор одновременно является левым, и наоборот.

Теорема 6.10. *Если $a(0,\xi,\lambda)$ не обращается в ноль на множестве $\left\{|\lambda| \leqslant q^{n/2-2m},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n\right\}$, то для любого показателя $s \geqslant 0$ оператор*

$$\mathcal{L} = [A,T] : W_2^{s+2m}(Q) \to \mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)$$

фредгольмов.

Доказательство. Очевидно, функции a_j'' $(j = 1,\ldots,l)$ принадлежат S^0, положительно однородны по ξ при $|\xi| \geqslant 1$ и $\operatorname{supp} a_j'' \subset K \times \left\{|\xi| \geqslant q^{-1}\right\}$. Кроме того, используя условие теоремы, при $|\xi| = 1$ будем иметь

$$a''(0,\xi,\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{l} \frac{a_j(0,\xi)}{a_0(0,\xi)}(q^{-2m}\lambda)^j = \frac{a(0,\xi,q^{-2m}\lambda)}{a_0(0,\xi)} \neq 0,$$

если $|\lambda| \leqslant q^{n/2}$. По теореме 6.7 существует символ $b(x,\xi,\lambda)$ класса $(0,r)$ для некоторого $r > q^{n/2}$ такой, что

$$b(x,\xi,0) = 1, \quad \operatorname{supp} b^{(k)}(x,\xi,0) \subset K \times \left\{|\xi| \geqslant q^{-1}\right\}\ (k = 1,2,\ldots)$$

и

$$a''(x,\xi,\Lambda)b(x,\xi,\Lambda) = b(x,\xi,\Lambda)a''(x,\xi,\Lambda) = I,$$

откуда в силу равенства (6.38) следует также, что

$$b(x,\xi,\Lambda)a'(x,\xi,\Lambda)=a_0(x,\xi).$$

В таком случае по лемме 6.5

$$A''(x,D,R)B(x,D,R)-I\in\mathcal{L}\left(W_2^s(\mathbb{R}^n);\,W_2^{s+1}(\mathbb{R}^n)\right),$$

а по лемме 6.6

$$B(x,D,R)A'(x,D,R)-A_0(x,D)\in\mathcal{L}\left(W_2^{s+2m}(\mathbb{R}^n);\,W_2^{s+1}(\mathbb{R}^n)\right)$$

для всех $s\geqslant 0$. После применения леммы 6.7 и теоремы Реллиха-Гординга будем иметь

$$r^+A''(x,D,R)r^+B(x,D,R)-I\in\mathcal{K}\left(W_2^s(Q);\,W_2^s(Q)\right),$$

$$r^+B(x,D,R)r^+A'(x,D,R)-A_0(x,D)\in\mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\,W_2^s(Q)\right).$$

Введем оператор $\mathcal{L}'=[r^+A',T]:W_2^{s+2m}(Q)\to\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)$ и матричные операторы

$$\mathcal{A}''=\begin{bmatrix} r^+A'' & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}:\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)\to\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q),$$

$$\mathcal{B}=\begin{bmatrix} r^+B & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}:\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)\to\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q).$$

Точнее, если $[f,g]=[f,g_1,\ldots,g_m]\in\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)$, то

$$\mathcal{A}''[f,g]^T=[r^+A''(x,D,R)f,\,g]^T,\quad \mathcal{B}[f,g]^T=[r^+B(x,D,R)f,\,g]^T.$$

Покажем, что оператор $\mathcal{P}=\mathcal{P}_0\mathcal{B}$ является одновременно правым и левым регуляризатором оператора $\mathcal{L}$.

Из (6.39), (6.40) следует, что

$$\mathcal{L}-\mathcal{A}''\mathcal{L}_0\in\mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\,\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)\right),\tag{6.42}$$

$$\mathcal{L}-\mathcal{L}'\in\mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\,\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)\right).\tag{6.43}$$

Поскольку $\mathcal{P}_0$ есть регуляризатор для $\mathcal{L}_0$, имеем

$$\mathcal{L}_0\mathcal{P}_0-I\in\mathcal{K}\left(\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q);\,\mathcal{W}_2^s(Q;\partial Q)\right),\tag{6.44}$$

$$\mathcal{P}_0\mathcal{L}_0 - I \in \mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\, W_2^{s+2m}(Q)\right). \tag{6.45}$$

Кроме того,

$$\mathcal{A}''\mathcal{B} - I \in \mathcal{K}\left(\mathcal{W}_2^{s}(Q;\partial Q);\, \mathcal{W}_2^{s}(Q;\partial Q)\right), \tag{6.46}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{L}' - \mathcal{L}_0 \in \mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\, W_2^{s+2m}(Q)\right). \tag{6.47}$$

Из (6.44), (6.46) следует, что

$$\mathcal{A}''\mathcal{L}_0(\mathcal{P}_0\mathcal{B}) - I \in \mathcal{K}\left(\mathcal{W}_2^{s}(Q;\partial Q);\, \mathcal{W}_2^{s}(Q;\partial Q)\right). \tag{6.48}$$

Из (6.42), (6.48) следует, что $\mathcal{L}(\mathcal{P}_0\mathcal{B}) - I \in \mathcal{K}\left(\mathcal{W}_2^{s}(Q;\partial Q);\, \mathcal{W}_2^{s}(Q;\partial Q)\right)$, т.е. оператор $\mathcal{P}_0\mathcal{B} : \mathcal{W}_2^{s}(Q;\partial Q) \to W_2^{s+2m}(Q)$ является для $\mathcal{L}$ правым регуляризатором. Далее, (6.45), (6.47) означают, что

$$\mathcal{P}_0\mathcal{B}\mathcal{L}' - I \in \mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\, W_2^{s+2m}(Q)\right). \tag{6.49}$$

Наконец, (6.43) и (6.49) дают $\mathcal{P}_0\mathcal{B}\mathcal{L} - I \in \mathcal{K}\left(W_2^{s+2m}(Q);\, W_2^{s+2m}(Q)\right)$, т.е. $\mathcal{P}_0\mathcal{B}$ является также и левым регуляризатором для $\mathcal{L}$. Теорема доказана.

$\square$

Тема 7

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СЖАТИЯМИ АРГУМЕНТОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

7.1. Весовые пространства и преобразование Фурье

В этом пункте приводятся известные результаты из теории весовых пространств (см. [14], [18]), необходимые для дальнейшего изложения.

В соответствии с определением В.А. Кондратьева [14], весовое пространство $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ при целом неотрицательном s вводится как пополнение множества $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ финитных бесконечно дифференцируемых функций по норме

$$\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим простейший пример. При $\beta = 0, s = 1, n \geqslant 3$ имеем для $u \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\|u\|^2_{H^1_0(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|x|^{-2} |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \right) dx.$$

Применяя неравенство Харди (в результате которого интеграл от первого слагаемого оценивается через интеграл от второго), получим

$$\|u\|_{H^1_0(\mathbb{R}^n)} \sim \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \Big)^{1/2} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |Fu(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2} = \|Fu\|_{H^0_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Отмечая плотность в $H^0_1(\mathbb{R}^n)$ образов Фурье функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (любая функция из $H^0_1(\mathbb{R}^n)$ аппроксимируется в $H^0_1(\mathbb{R}^n)$ функцией из

$L_2(\mathbb{R}^n)\bigcap H_1^0(\mathbb{R}^n)$, последнее пространство есть образ соболевского пространства $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ под действием изоморфизма F; остается заметить, что $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ всюду плотно в $W_2^1(\mathbb{R}^n)$), получаем, что преобразование Фурье F продолжается до изоморфизма между $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ и $H_1^0(\mathbb{R}^n)$.

В общем случае, для описания преобразования Фурье в весовых пространствах необходимо определить пространства $H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ для произвольных $s,\beta\in\mathbb{R}$. Сделаем это, следуя [18]. Для функции $u\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ рассмотрим преобразование Меллина

$$\widetilde{u}(\lambda,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty r^{-i\lambda-1}u(r,\varphi)dr\quad(\lambda\in\mathbb{C},\varphi\in S^{n-1}).$$

Свойства преобразования Меллина вытекают из соответствующих хорошо известных свойств преобразования Фурье благодаря соотношению

$$\widetilde{u}(\mu+i\nu,\varphi)=F_{t\to\mu}[e^{\nu t}u(e^t,\varphi)](\mu).$$

Так, справедливы формула обращения

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\nu}r^{i\lambda}\widetilde{u}(\lambda,\varphi)d\lambda$$

и равенство Парсеваля

$$\int\limits_{\mathrm{Im}\,\lambda=\nu}|\widetilde{u}(\lambda,\varphi)|^2d\lambda=\int\limits_0^\infty r^{2\nu-1}|u(r,\varphi)|^2dr,$$

в силу которого можно перейти в $H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ к эквивалентной норме

$$\left(\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\beta-s}\sum_{j=0}^s|\lambda|^{2j}\|\widetilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^{s-j}(S^{n-1})}d\lambda\right)^{1/2}.$$

Кроме того, в $H^s(S^{n-1})$ удобно пользоваться специальной нормой, зависящей от параметра λ, определяя ее при помощи ряда Фурье функции по ортонормированному базису в $L_2(S^{n-1})$, состоящему из сферических функций Y_{mk} $(m=0,1,\ldots;\ k=1,\ldots,k_m=(2m+n-2)(m+n+3)![(n-$

$2)!m!]^{-1} = O(m^{n-2}),\ m \to \infty;\ Y_{mk}$ — сферические функции порядка m): если

$$v(\omega) = \sum_{m,k} v_{mk} Y_{mk}(\omega),$$

где

$$v_{mk} = \int\limits_{S^{n-1}} v(\omega) Y_{mk}(\omega) d\omega,$$

то

$$\|v\|_{H^s(\lambda;S^{n-1})} = \left(\sum_{m,k} (1 + m^2 + |\lambda|^2)^s |v_{mk}|^2 \right)^{1/2},$$

что при целом неотрицательном s эквивалентно (т.е. подчиняется двусторонней оценке с независящими от v и λ константами) выражению

$$\left(\|u\|^2_{H^s(S^{n-1})} + |\lambda|^{2s} \|u\|^2_{L_2(S^{n-1})} \right)^{1/2}.$$

Итак, исходная норма в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна норме

$$\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda = \beta - s} \|\widetilde{u}(\lambda + in/2, \cdot)\|^2_{H^s(\lambda;S^{n-1})} d\lambda \right)^{1/2}. \qquad (7.1)$$

Правая часть сохраняет смысл для любого вещественного s, что делает естественным определение пространства $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ в случае произвольного $s \in \mathbb{R}$ как пополнения множества $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ по норме (7.1).

При изучении преобразования Фурье в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ можно вначале рассматривать его на множестве $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ при $\beta - s < n/2$, и на множестве $M_p = \{u \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\gamma u(x) dx = 0,\ |\gamma| = 0, 1, \ldots, p\}$ при $n/2 + p < \beta - s < n/2 + p + 1$ $(p = 0, 1, \ldots)$.

Для обоих случаев доказаны (см. [18, глава 2]) плотность области определения F в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$, а также оценка $\|Fu\|_{H^\beta_s(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)}$.

Замечание 7.1. Естественность накладываемых на u условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\gamma u(x) dx = 0 \ (|\gamma| = 0, \ldots, p),$$

равносильных условиям $(Fu)^{(\gamma)}(0) = 0$ ($|\gamma| = 0, \ldots, p$), проиллюстрируем на примере $n = 3, \beta = 2, s = 0, p = 0$. Для конечности интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-4}|Fu|^2 d\xi$, обеспечивающего конечность нормы

$$\|Fu\|_{H_0^2(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2(-2+|\alpha|)} |D_\xi^\alpha Fu|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

необходимо и достаточно, чтобы $Fu(0) = 0$. $\square$

Таким образом, при $\beta - s \neq n/2 + p$ ($p = 0, 1, \ldots$) преобразование Фурье F однозначно продолжается до непрерывного оператора

$$F_{\beta-s} : H_\beta^s(\mathbb{R}^n) \to H_s^\beta(\mathbb{R}^n).$$

При дополнительном условии $\beta - s \neq -n/2 - p$ ($p = 0, 1, \ldots$) этот оператор является изоморфизмом, а обратный оператор $F_{\beta-s}^{-1}$ совпадает с обратным преобразованием Фурье на функциях из $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (если $s - \beta < n/2$, и на функциях из M_q, если $n/2 + q < s - \beta < n/2 + q + 1,\ q = 0, 1, \ldots$).

Стоит отметить, что операторы $F_{\beta-s}$ и $F_{\beta'-s'}$, когда числа $\beta - s$ и $\beta' - s'$ принадлежат различным интервалам

$$(-\infty; n/2), \quad (n/2 + p; n/2 + p + 1),\ p = 0, 1, \ldots,$$

различаются, вообще говоря, на функциях из $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

7.2. Оценка для оператора умножения на однородную функцию

Пусть $\Phi(\xi)$ — гладкая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функция, положительно однородная вещественной степени a: $\Phi(t\xi) = t^a \Phi(\xi) \quad (t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Цель этого пункта — доказательство оценки

$$\|\Phi u\|_{H_{s-a}^\beta(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})} \cdot \|u\|_{H_s^\beta(\mathbb{R}^n)}$$

для оператора умножения на $\Phi(\xi)$ в $H^\beta_s(\mathbb{R}^n_\xi)$. Вначале оценим норму оператора

$$H^\beta(\lambda; S^{n-1}) \ni u \mapsto \Phi u \in H^\beta(\lambda; S^{n-1})$$

умножения на функцию $\Phi(\omega)$ в $H^\beta(\lambda; S^{n-1})$ ($\Phi \in C^\infty(S^{n-1})$). Для этого воспользуемся соотношением

$$\|\Phi u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} = \sup_{v\in H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})} \frac{\left|\int\limits_{S^{n-1}} \Phi(\omega)u(\omega)v(\omega)d\omega\right|}{\|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})}}. \tag{7.2}$$

Без ограничения общности можно считать $u, v \in C^\infty(S^{n-1})$. Сначала предположим, что $\beta \geqslant 0$. Имеем

$$\|u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} = \sum_{m,k} (1+m^2+|\lambda|^2)^\beta |u_{mk}|^2,$$

где u_{mk} — коэффициенты Фурье разложения функции u в $L_2(S^{n-1})$ по ортонормированному базису из сферических функций Y_{mk} (для гладкой функции u последовательность u_{mk} быстро убывает). Запишем очевидные неравенства ($\beta \geqslant 0$):

$$c_1((1+m^2)^\beta + |\lambda|^{2\beta}) \leqslant (1+m^2+|\lambda|^2)^\beta \leqslant c_2((1+m^2)^\beta + |\lambda|^{2\beta})$$

$$(c_1 = \min(1, 2^{\beta-1}), \quad c_2 = \max(1, 2^{\beta-1})).$$

Умножая эти неравенства на $|u_{mk}|^2$ и суммируя по m и k, получаем

$$c_1\left(\|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant \|u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right).$$

Оценим норму оператора $H^\beta(S^{n-1}) \ni u \mapsto \Phi u \in H^\beta(S^{n-1})$ (сейчас уже норма в пространстве не зависит от λ).

Возьмем какой-нибудь гладкий атлас сферы (например, основанный на стереографической проекции) $\{(U_i, \chi_i)\}_{i=1,2}$, где $\{U_1, U_2\}$ — открытое покрытие S^{n-1}, а $\chi_i : U_i \to \mathbb{R}^{n-1}_{x'}$ ($i = 1, 2$) — координатные отображения (стереографические проекции). Пусть $\{\zeta_i\}_{i=1,2}$ — подчиненное указанному покрытию разбиение единицы. Тогда $\zeta_i u \in \dot{C}^\infty(U_i)$ — гладкая финитная функция в окрестности U_i, где действует координатная система χ_i, а $(\zeta_i u) \circ \chi_i^{-1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Соотношение

$$\|u\|_{H^\beta(S^{n-1})} = \left(\sum_{i=1,2} \|(\zeta_i u) \circ \chi_i^{-1}\|^2_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/2}$$

задает в $H^\beta(S^{n-1})$ норму, эквивалентную введенной при помощи коэффициентов Фурье.

Возьмем также гладкие финитные в U_i функции h_i, равные 1 на $\mathrm{supp}\zeta_i$, так что $\zeta_i \Phi u = h_i \zeta_i \Phi u = (h_i \Phi) \cdot (\zeta_i u)$, причем функции $h_i \Phi, \zeta_i u$ принадлежат $\dot{C}^\infty(U_i)$. Тогда

$$(\zeta_i \Phi u) \circ \chi_i^{-1} = (h_i \Phi)(\chi_i^{-1}(x')) \cdot (\zeta_i u)(\chi_i^{-1}(x')).$$

Временно обозначим

$$f_i(x') = (\zeta_i u)(\chi_i^{-1}(x')), \quad \varphi_i(x') = (h_i \Phi)(\chi_i^{-1}(x')) \quad (i = 1, 2)$$

— функции из $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Оценим норму

$$\|\varphi f\|_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} = \sup_{g \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \frac{\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x') f(x') g(x') dx' \right|}{\|g\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R}^{n-1})}} .$$

Применяя последовательно равенство Парсеваля для преобразования Фурье (используем обозначение $\widehat{u}(\xi') = F_{x' \to \xi'} u$), формулу для преобразования Фурье произведения (опускаем для краткости записи несущественный для оценки множитель $(2\pi)^{-n/2}$) и теорему Фубини, получим

$$\int (\varphi f)(x') g(x') dx' = \int (\widehat{\varphi f})(\xi') \widehat{g}(-\xi') d\xi' =$$

$$= \int \widehat{g}(-\xi') d\xi' \int \widehat{f}(\xi' - \eta') \widehat{\varphi}(\eta') d\eta' = \int \widehat{\varphi}(\eta') d\eta' \int \widehat{f}(\xi' - \eta') \widehat{g}(-\xi') d\xi'$$

(интегрирование везде выполняется по всему пространству $\mathbb{R}^{n-1}$), так что

$$\left|\int \varphi(x')f(x')g(x')dx'\right| \leqslant \int |\widehat{\varphi}(\eta')|d\eta' \int |\widehat{f}(\xi'-\eta')\widehat{g}(-\xi')|d\xi' =$$

$$= \int |\widehat{\varphi}(\eta')|d\eta' \int (1+|\xi'|)^{\beta}|\widehat{f}(\xi'-\eta')|(1+|\xi'|)^{-\beta}|\widehat{g}(-\xi')|d\xi'.$$

Применяя известное алгебраическое неравенство

$$1+|\xi'| \leqslant (1+|\eta'|)(1+|\xi'-\eta'|),$$

а затем неравенство Шварца, видим, что последний интеграл не превосходит

$$\int (1+|\eta'|)^{\beta}|\widehat{\varphi}(\eta')|d\eta' \int (1+|\xi'-\eta'|)^{\beta}|\widehat{f}(\xi'-\eta')|(1+|\xi'|)^{-\beta}|\widehat{g}(-\xi')|d\xi' \leqslant$$

$$\leqslant \int (1+|\eta'|)^{\beta}|\widehat{\varphi}(\eta')| \left(\int (1+|\xi'-\eta'|)^{2\beta}|\widehat{f}(\xi'-\eta')|^2 d\xi'\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int (1+|\xi'|)^{-2\beta}|\widehat{g}(\xi')|^2 d\xi'\right)^{1/2} d\eta' \leqslant 2^{\beta} \int (1+|\eta'|)^{\beta}|\widehat{\varphi}(\eta')|d\eta' \times$$

$$\times \left(\int (1+|\xi'|^2)^{\beta}|\widehat{f}(\xi')|^2 d\xi' \int (1+|\xi'|^2)^{-\beta}|\widehat{g}(\xi')|^2 d\xi'\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{\beta} \int (1+|\eta'|)^{\beta}|\widehat{\varphi}(\eta')|d\eta' \cdot \|f\|_{H^{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})}\|g\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Первый интеграл можно оценить, например, следующим образом, взяв произвольное число $\delta > 0$:

$$2^{\beta}\int (1+|\eta'|)^{\beta}|\widehat{\varphi}(\eta')|d\eta' = 2^{\beta}\int (1+|\eta'|)^{-(n+\delta)/2}(1+|\eta'|)^{\beta+(n+\delta)/2}|\widehat{\varphi}(\eta')|d\eta' \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\beta}\left(\int (1+|\eta'|)^{-(n+\delta)}d\eta'\right)^{1/2}\left(\int (1+|\eta'|)^{2\beta+n+\delta}|\widehat{\varphi}(\eta')|^2 d\eta'\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_3\|\varphi\|_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \quad (c_3 = c_3(\delta,\beta)).$$

Итак, $\|\varphi f\|_{H^{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant c_3\|\varphi\|_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\|f\|_{H^{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})}$, откуда

$$\|\Phi u\|^2_{H^{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{i=1,2} \|(\zeta_i\Phi u)\circ\chi_i^{-1}\|^2_{H^{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{i=1,2}\|\varphi_i f_i\|^2_{H^{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_3^2 \sum_{i=1,2} \|\varphi_i\|^2_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\|f_i\|^2_{H^{\beta}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_3^2 \max_{i=1,2} \|\varphi_i\|^2_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \sum_{i=1,2} \|(\zeta_i u)\circ \chi_i^{-1}\|^2_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} =$$
$$= c_3^2 \max_{i=1,2} \|\varphi_i\|^2_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})}.$$

Далее удобно взять наименьшее $\delta > 0$ так, чтобы число $N = \beta + (n+\delta)/2$ было натуральным, $N = [\beta + n/2] + 1$. Тогда в силу финитности h_i $\big(\mathrm{supp}(h_i \circ \chi_i^{-1}) \subset \{|x'| < R\}\big)$ можно записать

$$\|\varphi_i\|^2_{H^N(\mathbb{R}^{n-1})} = \|(h_i\Phi)\circ\chi_i^{-1}\|^2_{H^N(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{|\alpha|\leqslant N} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big|D^\alpha\left(h_i\Phi(\chi_i^{-1}(x'))\right)\Big|^2 dx' =$$
$$= \sum_{|\alpha|\leqslant N} \int\limits_{|x'|<R} \Big|D^\alpha\left(h_i\Phi(\chi_i^{-1}(x'))\right)\Big|^2 dx' \leqslant c_4 \sum_{|\alpha|\leqslant N} \int\limits_{|x'|<R} \Big|D^\alpha\left(\Phi(\chi_i^{-1}(x'))\right)\Big|^2 dx' =$$
$$= c_4 \|\Phi\circ\chi_i^{-1}\|^2_{H^N(|x'|<R)} \leqslant c_5 \|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})}$$

(c_5 зависит от χ_i, h_i).

Итак, норма оператора умножения на Φ в $H^\beta(S^{n-1})$ не превосходит $c_6\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}$, причем в качестве N можно взять $[\beta + n/2] + 1$. Наконец,

$$\|\Phi u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} \leqslant c_2\left(\|\Phi u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|\Phi u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_2\left(c_6^2\|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})}\|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|\Phi\|^2_{C(S^{n-1})}\ \|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_7\|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})}\left(\|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_8\|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})}\|u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})},$$

где константа c_8 не зависит от u, Φ и λ.

Замечание 7.2. Конечно, в случае, когда β — целое неотрицательное число, норма оператора умножения на Φ в $H^\beta(S^{n-1})$ очевидным образом оценивается через $\|\Phi\|_{C^\beta(S^{n-1})}$. $\square$

Для перехода к отрицательным β воспользуемся соотношением (7.2), в силу которого

$$\Big|\int\limits_{S^{n-1}} \Phi(\omega)u(\omega)v(\omega)d\omega\Big| \leqslant \sqrt{c_8}\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}\|u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})}\|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})},$$

и, значит,

$$\frac{\left|\int\limits_{S^{n-1}}(\Phi v)(\omega)u(\omega)d\omega\right|}{\|u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})}} \leqslant \sqrt{c_8}\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}\|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})},$$

т.е.

$$\|\Phi v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})} \leqslant \sqrt{c_8}\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}\|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})}.$$

Таким образом, мы показали, что для произвольного вещественного β справедлива оценка

$$\|\Phi u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} \leqslant c_9\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}\|u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})},$$

где $N = [|\beta| + n/2] + 1$, а константа c_9 $(= \sqrt{c_8})$ не зависит от u, Φ и λ (но может зависеть от β).

Рассмотрим теперь умножение на функцию $\Phi(\xi) = \rho^a\Phi(\omega)$ $(\rho = |\xi|$, $\omega \in S^{n-1})$ в пространстве $H_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$\|u\|^2_{H_s^\beta(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-\beta} \|\widetilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})}d\lambda,$$

$$\|\Phi u\|^2_{H_{s-a}^\beta(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-a-\beta} \|\widetilde{\Phi u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})}d\lambda.$$

Но

$$\widetilde{\Phi u}(\lambda,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\rho^{-i\lambda-1}\rho^a\Phi(\omega)u(\rho,\omega)d\rho =$$

$$= \Phi(\omega)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\rho^{-i(\lambda+ia)-1}u(\rho,\omega)d\rho = \Phi(\omega)\widetilde{u}(\lambda+ia,\omega),$$

так что

$$\|\Phi u\|^2_{H_{s-a}^\beta(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-a-\beta} \|\Phi(\cdot)\widetilde{u}(\lambda+ia+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})}d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-\beta} \|\Phi(\cdot)\widetilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda-ia;S^{n-1})}d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c_8\|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})}\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-\beta} \|\widetilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda-ia;S^{n-1})}d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c_{10}\|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})} \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-\beta} \|\widetilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})}d\lambda,$$

поскольку для всех $m=0,1,\ldots$ и λ на прямой $\mathrm{Im}\lambda=s-\beta$ имеет место неравенство

$$\left(1+m^2+|\lambda-ia|^2\right)^\beta \leqslant \max\left(1, \left(\frac{1+(s-\beta-a)^2}{1+(s-\beta)^2}\right)^\beta\right)\cdot\left(1+m^2+|\lambda|\right)^\beta.$$

Таким образом, для всех $u\in H^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\|\Phi u\|_{H^\beta_{s-a}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}\cdot\|u\|_{H^\beta_S(\mathbb{R}^n)},$$

где константа c не зависит от u и Φ, а $N=[|\beta|+n/2]+1$.

7.3. Операторы свертки в $H^\beta_s(\mathbb{R}^n)$

Для функции Φ из предыдущего пункта при

$$\beta-s\neq n/2+p,\ \beta-s+a\neq -n/2-p\quad (p=0,1,\ldots)$$

можно ввести ограниченный оператор свертки $\Phi_{\beta-s}(D)$, действующий из $H^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-a}_\beta(\mathbb{R}^n)$ по формуле $\Phi_{\beta-s}(D)u=F^{-1}_{\beta-s+a}\Phi(\xi)F_{\beta-s}u$; при этом из результатов пунктов 7.2 и 7.3 для нормы этого оператора вытекает оценка

$$\|\Phi_{\beta-s}(D)\|\leqslant c(\beta,s,a)\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})},\qquad N=[|\beta|+n/2]+1.$$

Пусть даны функции $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$, положительно однородные степеней a_1 и a_2. При выполнении ограничений

$$\beta-s\neq n/2+p,\ \beta-s+a_1\neq\pm(n/2+p),\ \beta-s+a_1+a_2\neq -n/2-p$$

$(p=0,1,\ldots)$ можно говорить об ограниченных операторах

$$\Phi_{1,\beta-s}(D)=F^{-1}_{\beta-s+a_1}\Phi_1(\xi)F_{\beta-s}: H^s_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^{s-a_1}_\beta(\mathbb{R}^n),$$

$$\Phi_{2,\beta-s+a_1}(D)=F^{-1}_{\beta-s+a_1+a_2}\Phi_2(\xi)F_{\beta-s+a_1}: H^{s-a_1}_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^{s-(a_1+a_2)}_\beta(\mathbb{R}^n).$$

В этом случае оператор $F_{\beta-s+a_1} : H_\beta^{s-a_1}(\mathbb{R}^n) \to H_{s-a_1}^\beta(\mathbb{R}^n)$ — изоморфизм, и композиция $\Phi_{2,\beta-s+a_1}(D)\Phi_{1,\beta-s}(D)$ есть ограниченный оператор

$$F^{-1}_{\beta-s+a_1+a_2}\Phi_2(\xi)\Phi_1(\xi)F_{\beta-s} : H_\beta^s(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^{s-(a_1+a_2)}(\mathbb{R}^n),$$

отвечающий произведению функций $(\Phi_2\Phi_1)(\xi)$.

В частности, если однородная функция $\Phi(\xi)$ степени a не обращается в ноль на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (или, что то же самое, на S^{n-1}), то при всех $\beta, s \in \mathbb{R}$ таких, что $\beta - s \neq \pm(n/2+p)$, $\beta - s + a \neq \pm(n/2+p)$ $(p = 0, 1, \ldots)$ ограниченный оператор

$$\Phi_{\beta-s}(D) = F^{-1}_{\beta-s+a}\Phi(\xi)F_{\beta-s} : H_\beta^s(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^{s-a}(\mathbb{R}^n)$$

имеет ограниченный обратный

$$\Phi^{-1}_{\beta-s}(D) = F^{-1}_{\beta-s}\Phi^{-1}(\xi)F_{\beta-s+a} : H_\beta^{s-a}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n),$$

т.е. является изоморфизмом $H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ на $H_\beta^{s-a}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 7.3. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ порядка $m = 0, 1, \ldots$ с постоянными коэффициентами. Для всякого целого неотрицательного показателя s он задает непрерывное отображение из пространства $H_\beta^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ в $H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$. При фиксированных β и s, удовлетворяющих условиям $\beta - s - m \neq n/2 + p$, $\beta - s \neq -n/2 - p$ $(p = 0, 1, \ldots)$, определен также ограниченный оператор свертки

$$A_{\beta-s-m}(D) = F^{-1}_{\beta-s}A(\xi)F_{\beta-s-m} : H_\beta^{s+m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n),$$

где $A(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ — символ дифференциального оператора, однородный полином степени m. Покажем, что (при дополнительном условии $\beta - s \neq n/2 + p$, $p = 0, 1, \ldots$) на всюду плотном в $H_\beta^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ подпространстве (если $\beta - s - m < n/2$, то на подпространстве $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, если $n/2 + p < \beta - s - m < n/2 + p + 1$, то на подпространстве M_p)

выполнено

$$A_{\beta-s-m}(D)u = F^{-1}A(\xi)Fu = A(D)u.$$

Тогда, в силу непрерывности операторов, $A_{\beta-s-m}(D)$ и $A(D)$ совпадают на всем пространстве $H^{s+m}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Действительно, пусть, например, $n/2+p < \beta-s-m < n/2+p+1$ для некоторого $p = 0, 1, \ldots$, и пусть $u \in M_p$. Функция $v = F_{\beta-s-m}u = Fu$ (на M_p отображение $F_{\beta-s-m}$ совпадает с обычным преобразованием Фурье, примененным к гладкой финитной функции) удовлетворяет условиям $v^{(\gamma)}(0) = 0$ $(|\gamma| \leqslant p)$. Но тогда функция $w(\xi) = A(\xi)v(\xi)$ является образом Фурье принадлежащей пространству $\dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ функции $\sum\limits_{|\alpha|=m} a_{\alpha}D^{\alpha}u$, причем $w^{(\gamma)}(0) = 0$ для $|\gamma| \leqslant p+m$, так что $w \in F(M_{p+m})$. Но при $n/2+(p+m) < \beta-s < n/2+(p+m)+1$ оператор $F_{\beta-s} : H^s_{\beta}(\mathbb{R}^n) \to H^{\beta}_{s}(\mathbb{R}^n)$ — изоморфизм, на M_{p+m} совпадающий с преобразованием Фурье. Следовательно, на $F(M_{p+m})$ обратный оператор $F^{-1}_{\beta-s}$ совпадает с обратным преобразованием Фурье F^{-1}. Поэтому $F^{-1}_{\beta-s}w = F^{-1}w$ и, таким образом,

$$F^{-1}_{\beta-s}A(\xi)F_{\beta-s-m}u = F^{-1}A(\xi)Fu = A(D)u.$$

Если же $\beta - s - m < n/2$, то для $u \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ снова имеем $v = F_{\beta-s-m}u = Fu$, а функция $w(\xi) = A(\xi)v(\xi)$ удовлетворяет условиям $w^{(\gamma)}(0) = 0 \quad (|\gamma| \leqslant m-1)$. Так что при $n/2+p < \beta-s < n/2+p+1$ $(p = 0, 1, \ldots, m-1)$ обязательно получим $w \in F(M_p)$, а при $\beta - s < n/2$ будем иметь $w \in F\left(\dot{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\right)$. И в этом случае $F^{-1}_{\beta-s}w = F^{-1}w$. $\square$

7.4. Операторы $\Phi_{\beta-s}(D,R)$

Зафиксируем $q>1$ и на заданных в $\mathbb{R}^n$ функциях рассмотрим оператор $(Ru)(x)=u(x/q)$. Очевидно, $(\widetilde{Ru})(\lambda,\varphi)=q^{-i\lambda}\widetilde{u}(\lambda,\varphi)$, и

$$\|Ru\|^2_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)}=\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\beta-s}\|\widetilde{Ru}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^s(\lambda;S^{n-1})}d\lambda=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\beta-s}\left|q^{-i(\lambda+in/2)}\right|^2\|\widetilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^s(\lambda;S^{n-1})}d\lambda=q^{2(\beta-s+n/2)}\|u\|^2_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)},$$

так что норма оператора R в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ равна $q^{\beta-s+n/2}$.

Для всякой гладкой в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ положительно однородной степени $a\in\mathbb{R}$ функции $\Phi(\xi)$ легко проверяется соотношение

$$R\Phi_{\beta-s}(D)=q^a\Phi_{\beta-s}(D)R \tag{7.3}$$

$$(\beta-s\neq n/2+p,\quad \beta-s+a\neq -n/2-p\quad (p=0,1,\dots)).$$

Надо лишь вспомнить, что $(FRu)(\xi)=q^n(Fu)(q\xi)\quad(u\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$, откуда получается $q^a(\Phi FRu)(\xi)=q^nq^a\Phi(\xi)Fu(q\xi)=q^n(\Phi Fu)(q\xi)$. При $a=0$ операторы свертки коммутируют с оператором сжатия.

Рассмотрим функцию двух переменных $\Phi(\omega,z)\quad(\omega\in S^{n-1},z\in\mathbb{C})$ такую, что вектор-функция $z\mapsto\Phi(\cdot,z)\in C^\infty(S^{n-1})$ аналитична в круге $|z|<\varkappa$ для некоторого $\varkappa>0$. Если ее разложить в ряд по степеням z, $\Phi(\omega,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi_k(\omega)z^k$, то $\Phi_k\in C^\infty(S^{n-1})$, причем для любого целого неотрицательного d и любого числа h, $0<h<\varkappa$, найдется постоянная $c=c(d,h)>0$ такая, что

$$\|\Phi_k\|_{C^d(S^{n-1})}\leqslant ch^{-k}\quad(k=0,1,\dots). \tag{7.4}$$

Для произвольного $a\in\mathbb{R}$ функцию $\Phi(\xi,z)=\rho^a\Phi(\omega,z)$ назовем символом класса $(a,\varkappa)$.

Лемма 7.1. *Пусть* $a,\beta,s\in\mathbb{R}$ *таковы, что*

$$\beta-s\neq n/2+p,\ \beta-s+a\neq -n/2-p\quad(p=0,1,\dots),$$

и $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$. *Тогда всякому символу* $\Phi(\xi, z)$ *класса* $(a, \varkappa)$ *формулами*

$$\Phi_{\beta-s}(D,R) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{k,\beta-s}(D)R^k, \quad \Phi_{k,\beta-s}(D) = F^{-1}_{\beta-s+a}\rho^a\Phi_k(\omega)F_{\beta-s} \quad (7.5)$$

ставится в соответствие ограниченный оператор

$$\Phi_{\beta-s}(D,R) : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-a}_\beta(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. В условиях леммы определены ограниченные операторы свертки $\Phi_{k,\beta-s}(D) : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-a}_\beta(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\|\Phi_{k,\beta-s}(D)\| \leqslant c(\beta,s,a)\|\Phi_k\|_{C^N(S^{n-1})}, \qquad N = \Big[|\beta| + n/2\Big] + 1.$$

Поэтому из (7.4) следует, что для любого числа h, $0 < h < \varkappa$, будем иметь

$$\|\Phi_{k,\beta-s}(D)\| \leqslant c(\beta,s,a,h) \cdot h^{-k} \qquad (k = 0,1,\ldots).$$

Принимая во внимание норму оператора R в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ (очевидно, что $\|R^k\| = \|R\|^k = q^{k(\beta-s+n/2)}$), для члена ряда (7.5) получаем оценку

$$\|\Phi_{k,\beta-s}(D)\| \leqslant c(\beta,s,a,h) \cdot \left(\frac{q^{\beta-s+n/2}}{h}\right)^k \qquad (k = 0,1,\ldots).$$

Если $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$, то можно взять $q^{\beta-s+n/2} < h < \varkappa$, и тогда члены ряда по норме мажорируются убывающей геометрической прогрессией. Ряд (7.5) сходится по операторной норме. $\square$

Лемма 7.2. *Пусть* $\beta - s \neq \pm(n/2 + p)$ $(p = 0,1,\ldots)$, $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$, *символы* $\Phi(\xi,z)$, $\Psi(\xi,z)$ *и* $\Theta(\xi,z)$ *принадлежат классу* $(0,\varkappa)$, *причем* $\Theta(\xi,z) = \Phi(\xi,z)\Psi(\xi,z)$. *Тогда*

$$\Theta_{\beta-s}(D,R) = \Phi_{\beta-s}(D,R)\Psi_{\beta-s}(D,R) = \Psi_{\beta-s}(D,R)\Phi_{\beta-s}(D,R).$$

Доказательство. На самом деле, в условиях леммы в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ действуют ограниченные операторы

$$\Phi_{\beta-s}(D,R) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{k,\beta-s}(D)R^k, \quad \Psi_{\beta-s}(D,R) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{k,\beta-s}(D)R^k$$

$$\Theta_{\beta-s}(D,R)=\sum_{k=0}^{\infty}\Theta_{k,\beta-s}(D)R^k, \quad \text{причем } \Theta_k(\xi)=\sum_{j=0}^{k}\Phi_j(\xi)\Psi_{k-j}(\xi).$$

Но композиция $\Phi_{\beta-s}(D,R)\Psi_{\beta-s}(D,R)$ задается рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\Phi_{j,\beta-s}(D)R^j\Psi_{k-j,\beta-s}(D)R^{k-j}\right)=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\Phi_{j,\beta-s}(D)\Psi_{k-j,\beta-s}(D)\right)R^k=\sum_{k=0}^{\infty}\Theta_{k,\beta-s}(D)R^k=\Theta_{\beta-s}(D,R).$$

Мы воспользовались тем, что оператор R^j коммутирует с оператором $\Psi_{k-j,\beta-s}(D)$, а оператор свертки $\Phi_{j,\beta-s}(D)\Psi_{k-j,\beta-s}(D)$ отвечает произведению функций $\Phi_j(\xi)\Psi_{k-j}(\xi)$. □

Из леммы 7.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 7.3. *Пусть $\beta-s\neq\pm(n/2+p)$ $(p=0,1,\ldots)$, $\varkappa>q^{\beta-s+n/2}$, а символ $\Phi(\xi,z)$ класса $(0,\varkappa)$ не обращается в ноль при $\xi\in S^{n-1}$ и $|z|<\varkappa$. Тогда ограниченный оператор $\Phi_{\beta-s}(D,R):H^s_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ есть изоморфизм.*

Доказательство. Заметим лишь, что функция $\Psi(\xi,z)=1/\Phi(\xi,z)$ аналитична в том же круге $|z|<\varkappa$, т.е. является символом класса $(0,\varkappa)$ таким, что $\Phi(\xi,z)\Psi(\xi,z)=1$. □

7.5. Разрешимость функционально-дифференциального уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|=2m}a_{k\alpha}D^\alpha\left(u(q^{-k}x)\right)=f(x) \qquad (x\in\mathbb{R}^n) \tag{7.6}$$

однородное порядка $2m$ с постоянными коэффициентами $a_{k\alpha}\in\mathbb{C}$. Если s — целое неотрицательное число, то левая часть $A(D,R)=\sum\limits_{k=0}^{l}A_k(D)R^k$

уравнения задает ограниченный оператор $A(D,R): H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$. Нас интересует вопрос обратимости этого оператора. Замечание пункта 7.4 позволяет рассматривать в качестве обобщения уравнения (7.6) на случай произвольного $s\in\mathbb{R}$ уравнение с ограниченным оператором $A_{\beta-s-2m}(D,R): H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$. (Конечно, накладываются ограничения $\beta-s-2m\neq n/2+p$, $\beta-s\neq\pm(n/2+p)$ $(p=0,1,\ldots)$).

Прежде чем сформулировать основной результат, отметим следующее.

Замечание 7.4. Из того, что $\beta-s\neq n/2+p$, очевидно следует, что $\beta-s-2m\neq n/2+p$, а из того, что $\beta-s-2m\neq -n/2-p$, вытекает, что $\beta-s\neq -n/2-p$ (p везде пробегает множество неотрицательных целых чисел). Поэтому условия

$$\beta-s\neq\pm(n/2+p),\ \beta-s-2m\neq\pm(n/2+p)\quad(p=0,1,\ldots)$$

равносильны условиям

$$\beta-s\neq n/2+p,\ \beta-s-2m\neq -n/2-p\quad(p=0,1,\ldots).$$

□

Теорема 7.1. *Пусть $\beta,s\in\mathbb{R}$ таковы, что*

(1) $\beta-s\neq n/2+p,\quad \beta-s-2m\neq -n/2-p\quad(p=0,1,\ldots)$;

(2) $A(\xi,z)\equiv\sum\limits_{k=0}^{l}\sum\limits_{|\alpha|=2m}a_{k\alpha}\xi^\alpha z^k\neq 0\quad(\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ |z|\leqslant q^{\beta-s+n/2-2m})$.

Тогда ограниченный оператор $A_{\beta-s-2m}(D,R): H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный обратный. Другими словами, для любой функции $f\in H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ уравнение (7.6) *имеет единственное решение $u\in H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Из основного (второго) условия теоремы следует, в частности (полагаем $z=0$), что "локальная" часть $A_0(D)=\sum\limits_{|\alpha|=2m}a_{0\alpha}D^\alpha$

оператора эллиптична:

$$A_0(\xi) \neq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \tag{7.7}$$

Поэтому ограниченный оператор $A_{0,\beta-s-2m}(D) : H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный обратный (см. пункт 7.4). Условие (7.7) позволяет также ввести функции

$$\Phi_j(\xi) = q^{-2mj}\frac{A_j(\xi)}{A_0(\xi)} \quad (j = 0, 1, \ldots, l),$$

являющиеся гладкими в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ положительно однородными функциями нулевой степени. Положим

$$\Phi(\xi, z) = \sum_{j=0}^{l} \Phi_j(\xi) z^j = \frac{A(\xi, q^{-2m}z)}{A_0(\xi)}\,.$$

Функция $\Phi(\xi, z)$ есть символ класса $(0, \varkappa)$ при любом $\varkappa > 0$. Основное условие теоремы гарантирует необращение в ноль функции $\Phi(\xi, z)$ на множестве $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $|z| < \varkappa$ для некоторого $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$. Но тогда по лемме 7.3 ограниченный оператор $\Phi_{\beta-s}(D, R) : H_\beta^s(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный обратный. Кроме того, используя (7.3), будем иметь

$$\Phi_{\beta-s}(D, R) A_{0,\beta-s-2m}(D) = \left(\sum_{j=0}^{l} \Phi_{j,\beta-s}(D) R^j\right) A_{0,\beta-s-2m}(D) =$$
$$= \sum_{j=0}^{l} q^{2mj} \Phi_{j,\beta-s}(D) A_{0,\beta-s-2m}(D) R^j = A_{\beta-s-2m}(D, R),$$

так как

$$q^{2mj}\Phi_{j,\beta-s}(D) A_{0,\beta-s-2m}(D) =$$
$$= q^{2mj} F_{\beta-s}^{-1} q^{-2mj} \frac{A_j(\xi)}{A_0(\xi)} F_{\beta-s} F_{\beta-s}^{-1} A_0(\xi) F_{\beta-s-2m} = A_{j,\beta-s-2m}(D).$$

Поскольку каждый из операторов $\Phi_{\beta-s}(D, R) : H_\beta^s(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$, $A_{0,\beta-s-2m}(D) : H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ является изоморфизмом, оператор $A_{\beta-s-2m}(D, R) : H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ есть также изоморфизм, поэтому

$$A_{\beta-s-2m}^{-1}(D, R) = A_{0,\beta-s-2m}^{-1}(D) \Phi_{\beta-s}^{-1}(D, R).$$

□

Заметим, что, уменьшая β и (или) увеличивая s, мы ослабляем условие, накладываемое на символ оператора: уменьшается круг, где выражение $A(\xi, z)$ не должно обращаться в ноль. За счет выбора β и s этот круг может быть сделан сколь угодно малым. В то же время, не обращаясь в ноль при $z = 0$, выражение $A(\xi, z)$ будет отличным от нуля и в некотором круге, так что эллиптичность “локальной” части $\sum\limits_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha} D^\alpha$ оператора в уравнении (7.6) гарантирует однозначную разрешимость уравнения при всех “достаточно хороших” функциях f. Оформим это наблюдение.

Следствие 7.1. *Если* $A_0(\xi) \equiv \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha}\xi^\alpha \neq 0$ $(\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, *то найдется* $\gamma \in \mathbb{R}$ *такое, что для всех* $\beta, s \in \mathbb{R}$ *таких, что* $\beta - s \neq n/2 + p$, $\quad \beta - s - 2m \neq -n/2 - p$ $(p = 0, 1, \dots)$ *и* $\beta - s < \gamma$, *уравнение* (7.6) *имеет для всякой функции* $f \in H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ *единственное решение* $u \in H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Упражнения

1. Решить краевую задачу

$$-\Delta[2u(x_1, x_2) - u(x_1/2, x_2/2)] = x_1 \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1),$$

$$u(x) = 0 \quad (|x| = 1).$$

Принадлежит ли решение пространству $W_2^2\,(|x| < 1)$?

2. Найти обобщенное решение краевой задачи

$$-\Delta[5u(x_1, x_2) + u(3x_1, 3x_2)] = 2(x_1^2 + x_2^2) - 1 \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1),$$

$$u(x_1, x_2) = 0 \quad (|x| \geqslant 1).$$

Принадлежит ли это решение пространству $W_2^2\,(|x| < 1)$?

3. Исследовать обобщенную разрешимость и гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для уравнения

$$-\Delta\left[\cos(\pi(x_1-x_2)/3)\,u(x)+(x_1^2+x_2^2)u(x/2)\right]=f(x)$$

в квадрате $|x_1|+|x_2|<1$.

4. Доказать, что условие

$$a(\lambda)\equiv\sum_{k=0}^{l}a_k\lambda^k\neq 0\quad\left(|\lambda|<q^{n/2-1}\right)$$

является необходимым и достаточным для фредгольмовой разрешимости краевой задачи

$$-\Delta A(R)u+A_1u=f\quad(x\in Q),$$

$$u\mid_{\partial Q}=0$$

в пространстве $L_2(Q)$, где $A_1:W_2^1(Q)\to L_2(Q)$ — линейный ограниченный оператор, оператор $A(R)$ имеет вид

$$A(R)u(x)=\sum_{k=0}^{l}a_ku(q^{-k}x)\quad(a_k\in\mathbb{C},\ q>1),$$

а ограниченная область $Q\subset\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $\overline{Q}\subset qQ$.

5. При каких значениях параметра $a\in\mathbb{R}$ краевая задача

$$[u(x)+\sin x_2u(x/2)]_{x_1x_1}+[u(x)+\sin x_1u(x/2)]_{x_2x_2}+$$

$$+a\left[u(x)+\cos(x_1^2+x_2^2)u(x/4)\right]_{x_1x_2}=f(x),$$

$$x=(x_1,x_2)\in Q=\{x_1^4+x_2^4<1\},\quad u\mid_{\partial Q}=g(x)$$

фредгольмова в пространствах $W_2^2(Q)\to L_2(Q)\times W_2^{3/2}(\partial Q)$?

6. Исследовать существование и единственность решения из пространства $H_\beta^2(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$\Delta u+au_{x_1x_1}(x/2)+bu_{x_2x_2}(x/4)=f(x),$$

где $a,b\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{R},\ f\in H_\beta^0(\mathbb{R}^2)$.

7. Указать такие $s \in \mathbb{R}$, что уравнение

$$u_{x_1x_1} + 2u_{x_2x_2} + u_{x_1x_2}(x/3) = f(x)$$

имеет единственное решение $u \in H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$ для любой функции $f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$.

Литература

[1] *Белан Е. П.* О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Ученые записки ТНУ. Сер. мат. мех. информ. и киберн. — 2002. — Т. 2. — С. 11–23.

[2] *Белан Е. П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифф. уравн. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 645–654.

[3] *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. — 1969. — Т. 185. — С. 739–740.

[4] *Варфоломеев Е. М.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, № 1. — С. 173-174.

[5] *Варфоломеев Е. М.* О бифуркации Андронова—Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, вып. 2. — С. 173-174.

[6] *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т. 21. — С. 5–36.

[7] *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах параболических и несамосопряженных эллиптических функционально-дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук, специальность 01.01.02 “Дифференциальные уравнения”. — МГУ, 27.04.2007.

[8] *Власов В. В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сборник. — 1995. — Т. 186, № 8. — С. 67–92.

[9] *Власов В. В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1999. — Т. 227. — С. 109–121.

[10] *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Матем. сб. — 1965. — Т. 68. — С. 373–416.

[11] *Воронцов М. А., Думаревский Ю. Д., Пруидзе Д. В., Шмальгаузен В. И.* Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью // Изв. АН СССР. Физика. — 1988. — Т. 52, № 2. — С. 374–376.

[12] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

[13] *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 140, № 1. — С. 14–28.

[14] *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — Т. 16. С. 209–292.

[15] *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[16] *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.

[17] *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. мех. — 1979. — Т. 15. — С. 39–47.

[18] *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. — М.: Наука, 1986.

[19] *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1993. — Т. 33, № 1. — С. 69–80.

[20] *Разгулин А. В.* О параболических функционально-дифференциальных уравнениях с управляемым преобразованием пространственных аргументов // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 448–451.

[21] *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59. — С. 103–113.

[22] *Россовский Л. Е.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов // Тр. Моск. мат. о-ва. — 2001. — Т. 62. — С. 199–228.

[23] *Россовский Л. Е.* Разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатиями аргументов в весовых пространствах // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2007. — Т. 26. — С. 37–55.

[24] *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

[25] *Селицкий А. М., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 1. — С. 207–208.

[26] *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 1 (307). — С. 169-170.

[27] *Скубачевский А. Л.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. — 1997. — Т. 31, № 4. — С. 60–65.

[28] *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифф. уравн. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1394–1401.

[29] *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Тр. С.-Петербург. мат. о-ва. — 1998. — Т. 5. — С. 223–288.

[30] *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 1. — С. 145–153.

[31] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

[32] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.

[33] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 3. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987.

[34] *Чушкин В. А., Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2003. — Т. 2. — С. 13–20.

[35] *Шамин Р. В.* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. — 2003. — Т. 194. — С. 141–156.

[36] *Agmon S.* On the eigenvalues and on the eigenfunctions of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. — 1962. — V. 15. — P. 119–147.

[37] *Cooke K., Wiener J.* Distributional and analytic solutions of functional–differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — V. 98. — P. 111–129.

[38] *Crandall M. G., Rabinowitz P. H.* The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1977. — V. 67. — P. 53–72.

[39] *Da Prato G., Lunardi A.* Hopf bifurcation for fully nonlinear equations in Banach space // Ann. Inst. Henri Poincare. — 1986. — V. 3. — P. 315–329.

[40] *Di Blasio G., Kunisch K.*, Sinestrari E. L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — V. 102, № 1. — P. 38–57.

[41] *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations // Ann. Math. — 1952. — V. 55. — P. 468–519.

[42] *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — V. 77. — P. 1–30.

[43] *Iserles A., Liu Y.* On neutral functional–differential equations with proportional delays // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — V. 207. — P. 73–95.

[44] *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators // J. Math. Soc. Japan. — 1961. — V. 13. — P. 246–274.

[45] *Kato T., Mcleod J. B.* Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — V. 77. — P. 891–937.

[46] *Kunisch K., Shappacher W.* Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate C_0-semigroup // J. Differential Equations. — 1983. — V. 50, № 1. — P. 49–79.

[47] *Nakagiri S.* Structural properties of functional differential equations in Banach spaces // Osaka J. Math. — 1988. — V. 85. — P. 353–398.

[48] *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory // Russian J. Math. Phys. — 1996. — V. 3. — P. 491–500.

[49] *Pazi A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1983.

[50] *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics. Proc. SPIE, ed. R. Roy. — 1993. — V. 2039. — P. 342–352.

[51] *Sato K., Ueno T.* Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary // J. Math. Kyoto Univ. — 1965. — V. 4. — P. 529–605.

[52] *Shamin R. V., Skubachevskii A. L.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Funct. Differ. Equ. — 2001. — V. 8. — P. 407–424.

[53] *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1996.

[54] *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equation arising in optoelectronics // Nonlinear Anal. — 1998. — V. 32, № 2. — P. 261–278.

[55] *Staffans O.* Some well-posed functional equations which generate semigroups // J. Differential Equations. — 1985. — V. 58, № 2. — P. 157–191.

[56] *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G.*, Abernathy R. L. Diffractive patterns in nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation // Chaos Solitons Fractals. — 1994. — V. 4. — P. 1701–1716.

[57] *Wu J.* Semigroup and integral form of a class of partial differential equations with infinite delay // Differ. Integral Equ. Appl. — 1991. — V. 4, № 6. — P. 1325–1351.